

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה



## תוכן העניינים

1.	סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה	1
5.	סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים	5
13.	סטטיסטיקה תיאורית- סכימה	13
4.	סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מרכז (ללא ספר)	4
17.	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן	17
20.	סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני	20
24.	סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן	24
26.	סטטיסטיקה תיאורית-אחוזונים בטבלה בדידה	26
28.	סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית	28
31.	סטטיסטיקה תיאורית-מקדם ההשתנות	31
33.	סטטיסטיקה תיאורית- ניתוח פלטים	33
35.	סטטיסטיקה תיאורית שאלות אמריקאיות	35
42.	התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית	42
48.	הסקה סטטיסטית - הקדמה	48
51.	התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי	51
57.	מושגי יסוד באמידה	57
62.	מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים	62
68.	בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)	68
86.	בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים	86
93.	בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים	93
99.	ניתוח שונות חד כיוונית	99
(ללא ספר)	גודל האפקט	22
108.	ניתוח שונות דו כיוונית	23

## תוכן העניינים

24.	מבחני חי בריבוע	144
25.	מקדם המתאם ( מדד קשר ) הלינארי ומובהקותו	161
26.	מדד הקשר ספירמן	184
27.	מדדי קשר - בחירת מדד מתאים	187

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית- סיווג משתנים וסולמות מדידה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1



## סטטיסטיקה תיאורית – סיווג משתנים וסולמות מדידה:

### רקע:

סטטיסטיקה תיאורית הוא ענף בו לומדים כיצד לאסוף נתונים, להציג אותם ולנתח אותם. בסטטיסטיקה תיאורית אנו פונים לקבוצה מסוימת, ובאותה קבוצה אנו אוספים נתונים על הישויות באותה קבוצה. משתנה – תכונה שיכולה לקבל מספר ערכים: דעה פוליטית, מקום מגורים, גובה של אדם וכדומה. חלוקה אחת של המשתנים הנמדדים היא לפי סולמות מדידה:

### מיון משתנים לפי סולמות המדידה:

1. סולם שמי (נומינאלי) – משתנה שלערכיו יש משמעות רק מבחינת הזהות ואין עניין של יותר או פחות. לדוגמה: מצב משפחתי (רווק/נשוי/אלמן/גרש), אזור מגורים. משתנה דיכוטומי (הינו מסולם שמי) אותם משתנים שיש להם רק שני ערכים אפשריות זכר/נקבה. מעש/לא מעש.
2. סולם סדר (אורדינאלי) – כאשר לערכים של המשתנה בנוסף לשם ישנה גם משמעות לסדר אבל אין משמעות לגודל ההפרש. למשל, דרגה בצבא.
3. סולם רווחים (אינטרוואלי) – משתנה שלערכים שלו בנוסף לשם ולסדר בניהם יש משמעות לרווחים בין הערכים אבל אין משמעות ליחס בין הערכים. למשל, קומה בבניין. סולם לא כל כך פופולרי.

### סולם מנה/יחס:

משתנה שלערכיו בנוסף לשם, לסדר ולרווח יש משמעות גם ליחס בין הערכים. למשל, מספר מכוניות למשפחה, משקל אדם בק"ג. הדרך הקלה ביותר כדי לזהות עם הסולם הוא סולם מנה היא על ידי מבחן האפס. בסולם מנה האפס הוא מוחלט, אבסולוטי, ומייצג אין.

### סוגי משתנים:

נבצע סיווג של המשתנים:

### משתנה איכותי

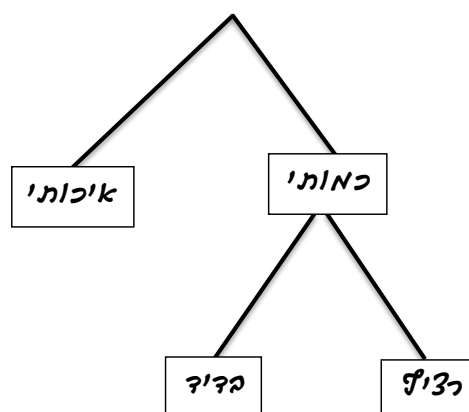
משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות, אין עניין כמותי לערכים המתקבלים. כמו: מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד...), מין האדם (זכר, נקבה), מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן).

### משתנה כמותי

משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו: גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה. את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים:

משתנה בדיד: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו: מספר ילדים למשפחה (1,2,3,...), ציון בבחינה (מ-0 ועד 100 בקפיצות של 1).

משתנה רציף: משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים, הערכים מתקבלים ברצף – ללא קפיצות של ערכים. דוגמאות: גובה בס"מ – אם הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ס"מ ועד 190 ס"מ – הגבהים בקבוצה הם ברצף. גם בין 160 ל-161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים (כמו 160.233 ס"מ, למשל).



## שאלות:

(1) באיזה סולם מדידה המשתנים הבאים נחקרים (שמי/סדר/רווחים/מנה):

- א. גובה (בס"מ).
- ב. מספר ילדים למשפחה.
- ג. מידת החרדה לפני מבחן.
- ד. שביעות רצון משירות לקוחות בסקלה מ-1 עד 7 (1 - כלל לא מרוצה עד 7 - מרוצה מאוד)
- ה. השכלה.
- ו. מספר אוטובוס.
- ז. מקום מגורים.
- ח. מין (1=גבר ; 2=אישה).
- ט. מידת נעליים.

(2) להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר":

מספר האיחורים	מספר העובדים
0	17
1	23
2	85
3	50
4	25

בחברה 200 עובדים.

- א. מהו המשתנה הנחקר כאן?
- ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי?
- אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?
- באיזה סולם מדידה המשתנה?

(3) להלן רשימה של משתנים כמותיים. ציינו האם הוא משתנה רציף/בדיד:

- א. שכר ב-ש.
- ב. ציון בחינת בגרות.
- ג. תוצאה של הטלת קובייה.
- ד. מהירות ריצה בתחרות.
- ה. שיעור התמיכה בממשלה.

### תשובות סופיות:

- |    |                   |                          |          |
|----|-------------------|--------------------------|----------|
| (1 | א. מנה.           | ב. מנה.                  | ג. סדר.  |
|    | ד. סדר.           | ה. מנה/ סדר.             | ו. שמי.  |
|    | ז. שמי.           | ח. שמי.                  | ט. סדר.  |
| (2 | א. מספר האיחורים. | ב. כמותי בדיד בסולם מנה. |          |
| (3 | א. רציף.          | ב. בדיד.                 | ג. בדיד. |
|    | ד. רציף.          | ה. רציף.                 |          |

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית- הצגה של נתונים

תוכן העניינים

1. כללי ..... 5

## סטטיסטיקה תיאורית – הצגה של נתונים:

### רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו:

### רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים. למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות: 3, 4, 3, 5, 4.

### טבלת שכיחויות בדידה:

שם המשתנה- $X$	שכיחות – $f(x)$	שכיחות יחסית באחוזים
$X_1$	$f_1$	$\frac{f_1}{N} \cdot 100$
$X_2$	$f_2$	$\frac{f_2}{N} \cdot 100$
$X_3$	$f_3$	$\frac{f_3}{N} \cdot 100$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$X_k$	$f_k$	$\frac{f_x}{N} \cdot 100$
סה"כ	$N = \sum_{i=1}^k f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

**דוגמה:**

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

הציון - $X$	מספר התלמידים – השכיחות - $f$	$F_i$	$\frac{f_i}{n}$
5	2	2	$0.08=2/25$
6	4	6	$0.16=4/25$
7	8	14	$0.32=8/25$
8	5	19	$0.2=5/25$
9	4	23	$0.16=4/25$
10	2	25	$0.08=2/25$

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחויות.

השכיחויות  $F_i$  – השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי:

 $\frac{f_i}{n}$  – איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.**טבלת שכיחויות במחלקות:**

משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד  
וטבלת שכיחויות תהיה ארוכה מידי.

**דוגמה:**

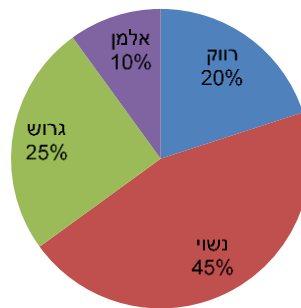
נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה, בדקו את התפלגות זמן הביצוע, בדקות.  
להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

### דיאגרמת עוגה:

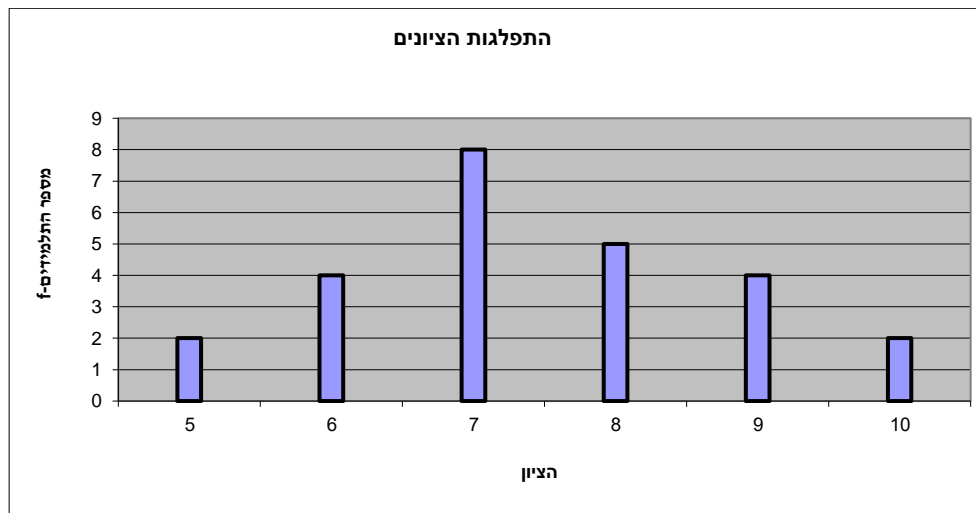
זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגרמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח", שהוא פרופורציונלי לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.

### התפלגות המצב המשפחתי



### דיאגרמת מקלות:

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי של השכיחות, כך שהגובה של המקל מעיד על השכיחות. רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף, וכן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.



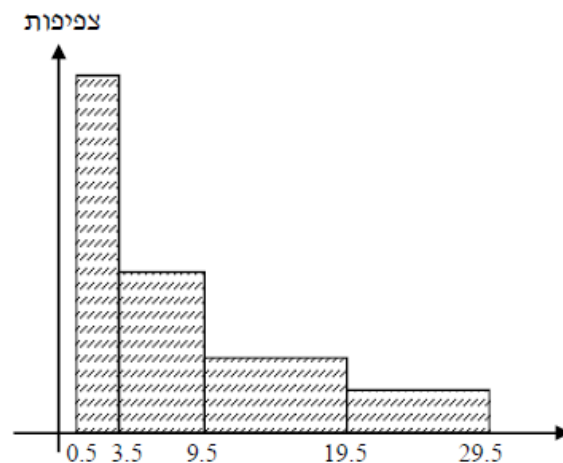


### היסטוגרמה:

ההיסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות, והיא רלוונטית למשתנה כמותי רציף.

בהיסטוגרמה הציר האופקי הוא הציר של המשתנה והציר האנכי הוא הציר של הצפיפות. הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה, והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחידה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

צפיפות	מצטברת	שכיחות	אמצע	רוחב	X
6.6667	20	20	2	3	0.5 - 3.5
3	38	18	6.5	6	3.5 - 9.5
1.4	52	14	14.5	10	9.5 - 19.5
0.8	60	8	24.5	10	19.5 - 29.5



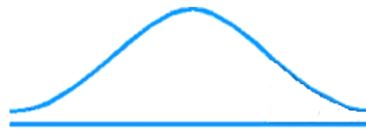
### פוליגון – מצולעון:

אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים. נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

### צורות התפלגות נפוצות:

#### התפלגות סימטרית פעמונית

רוב התצפיות במרכז, וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. לדוגמה, ציוני IQ.

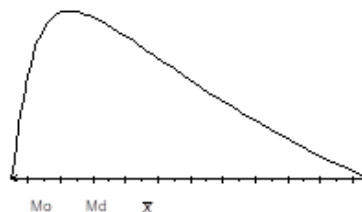


ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות, כגון:

#### התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. לדוגמה, שכר במשק.

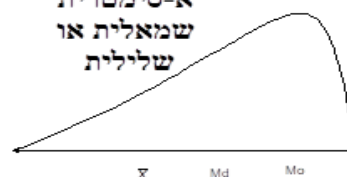
התפלגות א-סימטרית  
ימנית או חיובית



#### התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית)

רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. לדוגמה, אורך חיים.

התפלגות  
א-סימטרית  
שמאלית או  
שלילית



## שאלות:

- (1) בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות : 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו-25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.
- א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.
- ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

- (2) להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

מספר התלמידים	המקצוע
44	מתמטיקה
20	תנ"ך
12	אנגלית
26	היסטוריה

- א. מהו המשתנה הנחקר?
- ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?

- (3) להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

מספר העובדים	השכלה
60	נמוכה
120	תיכונית
20	אקדמאית

- א. מהו המשתנה הנחקר?
- מאיזה סולם הוא?
- ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

- (4) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
- 7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6.
- א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?
- ב. תארו את הרשימה בטבלת שכיחויות.
- ג. הוסיפו שכיחויות יחסיות לטבלה.
- ד. תארו את הנתונים באופן גרפי.

### תשובות סופיות:

(1) א. להלן טבלה: ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

$x$	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
ערוץ 1	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 10	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
ערוץ 2	75	$\frac{75}{200}$	37.5%
כבלים	50	$\frac{50}{200}$	25%
לא צפו	25	$\frac{25}{200}$	12.5%
סה"כ	200	1	100%

- (2) א. מקצוע מועדף. ב. 19.6%.
- (3) א. משתנה נחקר: השכלה, סוג: סדר. ב. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

4) א. המשתנה : ציון, משתנה בדיד.  
ד. עיין גרף מלא בסרטון הוידאו.

ב+ג. להלן טבלה :

$x$	$f(x)$	$\frac{f(x)}{n}$	%
4	1	$\frac{1}{20}$	5%
5	2	$\frac{2}{20}$	10%
6	6	$\frac{6}{20}$	30%
7	4	$\frac{4}{20}$	20%
8	4	$\frac{4}{20}$	20%
9	2	$\frac{2}{20}$	10%
10	1	$\frac{1}{20}$	5%
סה"כ	20	20	100%

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית- סכימה

תוכן העניינים

1. כללי..... 13

## סטטיסטיקה תיאורית – סכימה:

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת לסכום של תצפיות:  $\sum_{i=1}^n X_i$ .

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

$i$	$X_i$
1	5
2	0
3	1
4	3
5	2

(הסבר מלא מופיע בסרטונים באתר).

## שאלות:

- 1) בבניין 5 דירות. לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה ( $X$ ), ומספר הנפשות החיות בדירה ( $Y$ ) חשבו:

מספר דירה	$X$	$Y$
1	2	1
2	3	1
3	2	2
4	4	3
5	3	2

א.  $\sum_{i=1}^3 X_i$

ב.  $\sum_{i=1}^5 Y_i$

ג.  $\sum_{i=1}^4 X_i$

ד.  $\left( \sum_{i=1}^4 X_i \right)^2$

ה.  $\sum X_i$

ו.  $\sum X_i Y_i$

ז.  $\sum(X_i) \sum(Y_i)$



- (2) נתון לוח ערכי המשתנים  $X_i$  ו- $Y_i$ , כאשר:  $i = 1, 2, \dots, 6$ , ונתונים הקבועים:  
 $a = 2$ ,  $b = 5$ . חשבו את הנוסחאות הבאות:

$i$	1	2	3	4	5	6
$X_i$	3	2	4	-2	1	4
$Y_i$	2	0	0	1	-5	2

א.  $\sum_{i=1}^4 y_i$

ב.  $\sum_{i=1}^6 a$

ג.  $\sum_{i=1}^6 x_i y_i$

ד.  $\sum_{i=1}^6 (x_i + y_i)$

ה.  $\sum_{i=1}^6 x_i + a$

- (3) קבעו לכל זהות האם היא נכונה:

א.  $\sum_{i=1}^n bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^n X_i$

ב.  $\sum_{i=1}^n a = a \cdot n$

ג.  $\left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$

## תשובות סופיות:

- |   |           |           |              |         |
|---|-----------|-----------|--------------|---------|
| 1 | א. 7.     | ב. 9.     | ג. 11.       | ד. 121. |
|   | ה. 14.    | ו. 27.    | ז. 126.      |         |
| 2 | א. 3.     | ב. 12.    | ג. 7.        | ד. 12.  |
|   | ה. 14.    |           |              |         |
| 3 | א. נכונה. | ב. נכונה. | ג. לא נכונה. |         |

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מרכז

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - הטווח, השונות וסטיית התקן

תוכן העניינים

1. כללי ..... 17

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – הטווח, השונות וסטיית התקן:

### רקע:

**המטרה:** למדוד את הפיזור של הנתונים, כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

### הטווח / תחום (RANGE):

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר:  $R = X_{\max} - X_{\min}$ .

### שונות וסטיית תקן:

שונות היא ממוצע ריבועי של הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור סדרת נתונים}$$

### דוגמאות:

(1) נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה: 5, 4, 9.

$$S_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור טבלת שכיחויות}$$

(2) להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44.

הציון $X$	השכיחות $F$	$x^2 \cdot F$
5	2	50
6	4	144
7	8	392
8	5	320
9	4	324
10	2	200
<b>סה"כ</b>		<b>1430</b>

$$S_x^2 = \frac{\sum x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$S = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

## שאלות:

- (1) להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:  
6, 5, 8, 7, 6, 6, 7, 8, 5, 4, 6, 10, 9, 8, 6, 7.  
חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

- (2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

- א. חשבו סטיית התקן.  
ב. חשבו את הטווח של הנתונים.  
הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם.
- (3) בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.  
א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?  
ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?
- (4) נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע: 2, 3, 2, 1-. חשבו את השונות של חמש התצפיות.
- (5) בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

מספר חדרים	פרופורציה
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

- א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?  
ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.  
ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע(יקטין, יגדל, לא ישנה) על כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים

### תשובות סופיות:

- (1) שונות : 2.19, סטיית תקן : 1.48, טווח : 6.
- (2) א. סטיית תקן : 1.106. ב. טווח : 4.
- (3) א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.  
ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.
- (4) 10.8.
- (5) א. 3.05. ב. 1.16. ג. ממוצע: יקטן, סטיית התקן: תגדל.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין רבעוני

תוכן העניינים

1. טווח בינרבעוני..... 20



## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי פיזור – טווח בין רבעוני:

### רקע:

הטווח הבין-רבעוני (יש הקוראים לו התחום הבין-רבעוני) נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות. הרעיון ליצור מדד פיזורי שלא רגיש לתצפיות החריגות ביותר. כדי לחשב את הטווח הבין-רבעוני יש למצוא את הרבעון התחתון והעליון של התפלגות התצפיות.

רבעון תחתון – ערך שמחלק את ההתפלגות לשניים.  
25% מהמקרים נמוכים ממנו או שווים לו ו 75% מהמקרים גבוהים או שווים לו.  
סימון:  $Q_1$ .

רבעון עליון – ערך שמחלק את ההתפלגות לשניים.  
75% מהמקרים נמוכים ממנו או שווים לו ו 25% מהמקרים גבוהים או שווים לו.  
סימון:  $Q_3$ .

הטווח הבין רבעוני הוא הפער בין שני הרבעונים:  $IQR = Q_3 - Q_1$ .

### שלבים במציאת טווח בין-רבעוני בטבלת שכיחויות:

שלב א: נמצא את הרבעון התחתון: הוא הערך שהשכיחות היחסית המצטברת באחוזים עברה לראשונה את 25%.

שלב ב: נמצא את הרבעון העליון: הוא הערך שהשכיחות היחסית המצטברת באחוזים עברה לראשונה את 75%.

שלב ג: נמצא את הטווח הבין-רבעוני: נחסר את הרבעונים:  $IQR = Q_3 - Q_1$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו. מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר תוכניות החיסכון בסניף?

# תוכניות החיסכון	$f(x)$	שכיחות מצטברת	שכיחות יחסית מצטברת
0	100		
1	75		
2	25		
3	25		
4	25		

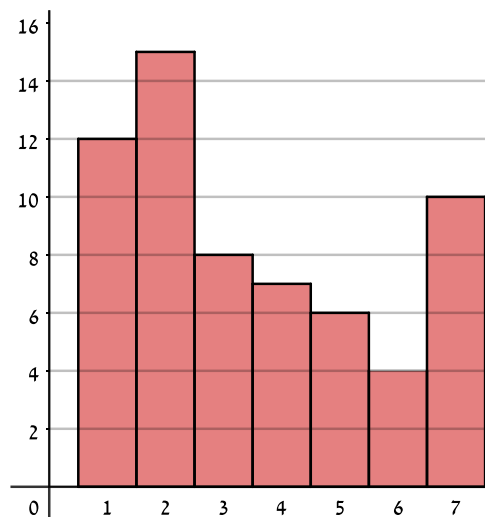
## שאלות:

1) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ב"הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

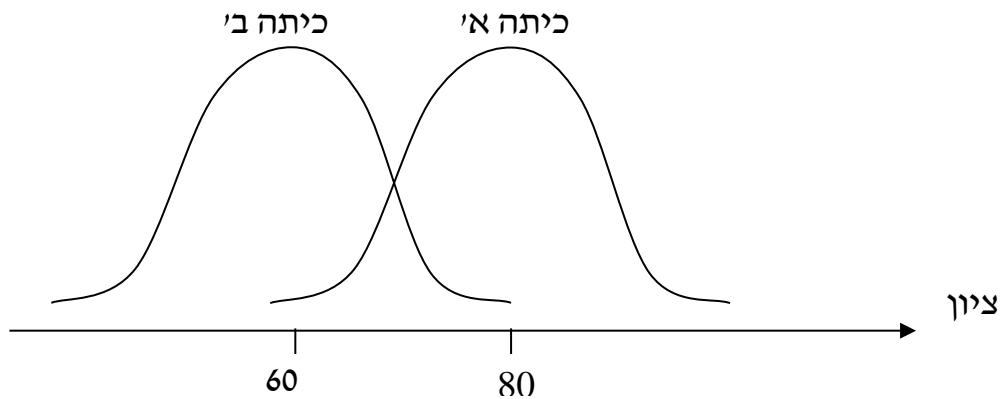
מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר המכוניות למשפחה ב"הגורן"?

2) בסקר שנעשה בדקו את מספר ימי המחלה השנתיים של מורים בארץ.



- א. מה מייצגים הערכים בציר האופקי?
- ב. מהו הטווח הבין-רבעוני של מספר ימי המחלה של המורים?
- ג. אם נוסף 25 מורים אשר הצהירו שמספר ימי המחלה השנתיים שלהם הוא 4 ימים, כיצד הדבר ישנה את הטווח הבין-רבעוני? הסבירו.
- ד. אם מסתבר שחלק מהמורים בסקר הצהירו שהם חלו 7 ימים בשנה אבל בפועל הם חלו 8 ימים, כיצד הדבר ישנה את הטווח הבין-רבעוני? הסבירו.

3) לפניך שתי עקומות המתארות את התפלגות הציונים בכל כיתה. באיזו כיתה הטווח הבין-רבעוני גדול יותר?



- א. כיתה א.
- ב. כיתה ב'.
- ג. לשתייהן אותו טווח בין-רבעוני.
- ד. לא ניתן לדעת, אין מספיק נתונים.

4) הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים :

- א. תגדיל את הטווח הבין-רבעוני.
- ב. תקטין את הטווח הבין-רבעוני.
- ג. לא תשנה הטווח הבין-רבעוני.
- ד. לא ניתן לדעת מה יקרה לטווח הבין-רבעוני.

5) חושב הטווח הבין-רבעוני עבור התפלגות מסוימת והתקבלה התוצאה אפס. לכן :

- א. לפחות 50% מהתצפיות זהות.
- ב. סטיית התקן היא אפס.
- ג. ההתפלגות היא סימטרית.
- ד. מצב זה כלל לא יתכן.

- (6) סניף מספר 543 של בנק "רווה" בדק ל-80 לקוחות את מספר הפעמים שכל לקוח נכנס לסניף הבנק במשך שבוע. התוצאות שהתקבלו הן:
- 50 אנשים נכנסו 0 פעמים לסניף.
  - 20 אנשים נכנסו פעם אחת לסניף.
  - 5 אנשים נכנסו פעמיים לסניף.
  - 5 אנשים נכנסו יותר מפעמיים.
- מהו הטווח הבין-רבעוני?
- א. 60.
  - ב. 2.
  - ג. 50.
  - ד. 1.

- (7) התפלגות הציונים במבחן ווקסלר היא סימטרית לכן:
- א. טווח הציונים הוא אפס.
  - ב. הטווח הבין רבעוני של הציונים אפס.
  - ג. סעיפים א ו-ב הם נכונים.
  - ד. אף סעיף אינו נכון.

### תשובות סופיות:

- (1) 2.
- (2) א. מספר ימי המחלה השנתיים. ב. 3. ג. יקטן. ד. לא ישתנה.
- (3) ג'.
- (4) ג'.
- (5) א'.
- (6) ד'.
- (7) ד'.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית- מדדי מיקום יחסי-ציון תקן

תוכן העניינים

1. כללי..... 24

## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – ציון תקן:

### רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמת ביחס לשאר התצפיות בהתפלגות.

### ציון תקן:

הנוסחה לציון תקן של תצפית היא:  $Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$ .

- ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע. כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע:
- ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.
  - ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.
  - ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

במקום עבודה מסוים, ממוצע המשכורות הוא 8 אלף ₪, עם סטית תקן של אלפיים ₪. באותו מקום עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים, עם סטית תקן של 1.5 שנים. ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים. מה ערן יותר, באופן יחסי, משכיל או משתכר?

## שאלות:

- (1) תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה. להלן התוצאות שהתקבלו:

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל: 68 בלשון ו-70 במתמטיקה.

- א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?  
 ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

- (2) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום. להלן טבלה המסכמת את המידע שנאסף על שני המשתנים:

ממוצע	תפוקה	מספר פועלים
ממוצע	48	15
סטיית תקן	10	2

- באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.  
 מה יותר חריג באותו היום, יחסית לשאר הימים שנבדקו: נתוני התפוקה או כמות הפועלים?  
 א. התפוקה.  
 ב. כמות הפועלים.  
 ג. חריגים באותה מידה.  
 ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

- (3) הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן של 10 סנטימטר. המשקל הממוצע הוא 66 ק"ג עם סטיית תקן של 8 ק"ג. ערך התגייס כשגובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.  
 א. במה ערך חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים, גובהו או משקלו?  
 ב. כמה ערך אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

## תשובות סופיות:

- (1) א. לשון. ב. 72.  
 (2) ב'.  
 (3) א. משקל. ב. 70.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית-אחזונים בטבלה בדידה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 26



## סטטיסטיקה תיאורית – מדדי מיקום יחסי – אחוזונים בטבלה בדידה:

### רקע:

האחוזון (המאון) ה- $p$  הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת, שעד אליו (כולל) יש  $p\%$  מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- $p$  ב- $X_p$ .

### חישוב האחוזון מתוך נתונים בטבלת שכיחויות בדידה:

האחוזון הוא הערך שבו בפעם הראשונה השכיחות היחסית המצטברת (באחוזים) גדולה או שווה ל- $p\%$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תוכניות החיסכון שלו:

שכיחות יחסית מצטברת	שכיחות מצטברת	$F(x)$	# תוכניות החיסכון
		100	0
		75	1
		25	2
		25	3
		25	4

א. מצאו את האחוזון ה-25.

ב. מצאו את הערך ש-20% מהמקרים מעליו.

## שאלות:

(1) להלן התפלגות של משתנה כלשהו:

$F(x)$	$X$
10	0
40	1
30	2
15	3
5	4

מצאו להתפלגות את:

- א. האחוזון ה-60.
- ב. המאון ה-40.
- ג. העשירון העליון.
- ד. הטווח בין הרבעונים.

(2) להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן":

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

חשבו את:

- א. העשירון התחתון.
- ב. האחוזון ה-30.
- ג. הערך ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.
- ד. רבעון עליון.

## תשובות סופיות:

- (1) א. 2. ב. 1. ג. 3. ד. 1.
- (2) א. 1. ב. 2. ג. 4. ד. 4.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 28

## סטטיסטיקה תיאורית – טרנספורמציה לינארית:

### רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה (או החסרה) של קבוע, והכפלה (או חילוק) של קבוע, לכל התצפיות:  $y = a \cdot x + b$ . כך יושפעו המדדים השונים:

$$\begin{aligned} MR_y &= a \cdot MR + b \\ MO_y &= a \cdot MO + b \\ \bar{y} &= a \cdot \bar{x} + b \\ Md_y &= a \cdot Md_x + b \end{aligned} \quad \text{מדדי המרכז:}$$

$$\begin{aligned} R_y &= |a| R_x \\ S_y &= |a| S_x \\ S_y^2 &= a^2 S_x^2 \end{aligned} \quad \text{מדדי הפיזור:}$$

$$\begin{aligned} Y_p &= a \cdot X_p + b \\ Z_Y &= \frac{a}{|a|} Z_x \end{aligned} \quad \text{מדדי המיקום היחסי:}$$

### שלבי העבודה:

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי  $a$  ו- $b$ .
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע של עובדים הינו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪. חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב-100 ₪.

## שאלות:

- (1) עבור סדרת נתונים התקבל:  $\bar{x} = 80, S = 15, MO = 70$ . הוחלט להכפיל את כל התצפיות ב-4 ולהחסיר מהתוצאה 5. חשבו את המדדים הללו לאחר השינוי.
- (2) בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ₪ לשעה עם סטיית תקן של 5 ₪ לשעה. הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ₪ לשעה. מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.
- (3) במבחן מסוים הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נק' לכל התלמידים. חשבו את המדדים לאחר הפקטור.
- (4) דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. התקבל שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא, עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים. מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקינים בקופסא?
- (5) חברת בזק הציעה את ההצעה הבאה: שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים וכן 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת. אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע חודשי יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות של 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2. חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.
- (6) הוכיחו שאם כל התצפיות בהתפלגות עברו טרנספורמציה לינארית:  $Y_i = a \cdot X_i + b$ , אזי הממוצע והשונות של כלל התצפיות לאחר הטרנספורמציה יהיו בהתאמה:
- $$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b, S_y^2 = a^2 S_x^2$$

### תשובות סופיות:

- (1) ממוצע: 315, סטיית תקן: 60, שכיח: 275.
- (2) ממוצע: 46, שונות: 30.25.
- (3) טווח: 40, חציון: 77, עשירון עליון: 91.
- (4) ממוצע: 37, סטיית תקן: 1.5.
- (5) ממוצע: 90, שונות: 25, ציון תקן: 2.
- (6)  $a^2 \cdot S_x^2$

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית-מקדם ההשתנות

תוכן העניינים

1. כללי ..... 31

## סטטיסטיקה תיאורית – מקדם ההשתנות:

### רקע:

כאשר מחשבים סטיית תקן למספר קבוצות בעלי ממוצע שונה, השוואת מידת פיזור הנתונים אינה מתייחסת לערך מרכז הנתונים (לממוצע למשל).  
על מנת לתת מדד פיזור המתחשב בממוצע הנתונים נחשב את מקדם ההשתנות –

$$CV = \frac{S(X)}{\bar{X}} : \text{Coefficient of Variation}$$

ככל שמקדם ההשתנות נמוך יותר, כך המשתנה מרוכז יותר סביב הממוצע, וככל שמקדם ההשתנות גבוה יותר, מידת הפיזור סביב הממוצע גבוהה יותר.



## שאלות:

- 1) להלן נתונים לגבי ציונים במבחן באנגלית ב-3 כיתות מתוך שכבה י' בתיכון:

כיתה	ממוצע	מס' תלמידים	סטיית תקן
1	76	40	12
2	68	20	15
3	82	30	10

א. חשבו את מקדם ההשתנות בכל כיתה.

ב. מהי הכיתה הכי הטרוגנית?

- 2) נתונות שתי קבוצות: הממוצע בקבוצה א' הוא 100 והשונות 100.

הממוצע בקבוצה ב' הוא 500 והשונות 400.

באיזו קבוצה מידת הפיזור יחסית קטן יותר?

- 3) במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית

(מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.

להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים:

מספר פועלים	תפוקה	ממוצע
15	48	
2	10	סטיית תקן

לפי קריטריון CV:

א. הפיזור באופן יחסי שווה בין התפוקה היומית לכמות הפועלים העובדים ביום.

ב. הפיזור יחסית יותר גדול עבור התפוקה היומית מאשר עבור מספר הפועלים ביום.

ג. הפיזור יחסית יותר גדול עבור מספר הפועלים ביום מאשר עבור התפוקה היומית.

ד. אין מספיק נתונים כדי לחשב את CV.

## תשובות סופיות:

- 1) א.  $\frac{\sigma}{\bar{X}}$ . ב. כיתה ב'.

- 2) קבוצה ב'.

- 3) ב'.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית- ניתוח פלטים

תוכן העניינים

1. כללי..... 33

## סטטיסטיקה תיאורית – ניתוח פלטים:

### שאלות:

(1) להלן פלט על התפלגות הגילאים באוכלוסייה מסוימת:

		Statistic
Age of Respondent	Mean	45.63
	Median	41.00
	Variance	317.140
	Std. Deviation	a
	Minimum	18
	Maximum	b
	Range	71
	Interquartile Range	28

- א. מצאו את הערכים בטבלה המסומנים ב-  $a$  ו-  $b$ .  
 ב. נתון שההתפלגות היא אסימטרית, האם היא נוטה ימינה או שמאלה?

(2) להלן התפלגות ההשכלה של העובדים בחברת "מתאר":

		Statistic
years of education	Mean	?
	Median	12.0000
	Variance	?
	Std. Deviation	2.54786
	Minimum	?
	Maximum	?
	Range	?
	Interquartile Range	?

מלאו את הערכים המסומנים בסימני שאלה.

**תשובות סופיות:**

- (1) א.  $b = 89$ ,  $a = 17.81$ . ב. אסימטרית ימנית.
- (2) ממוצע: 11.909, שונות: 6.492, טווח: 10, טב"ר: 3.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית שאלות אמריקאיות

תוכן העניינים

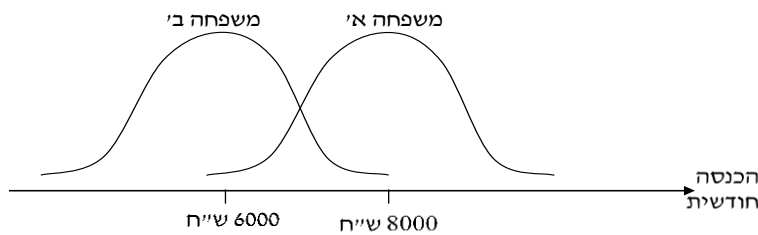
1. כללי ..... 35

## סטטיסטיקה תיאורית – שאלות אמריקאיות:

### שאלות:

#### שאלות 1-3 מתייחסות לקטע הבא:

להלן שתי עקומות המתארות את התפלגות ההכנסות החודשיות של שתי משפחות שנבחרו באקראי:



- (1) לאיזו משפחה הכנסה שכיחה גבוהה יותר?
  - א. משפחה א'.
  - ב. משפחה ב'.
  - ג. לשתיהן אותה הכנסה שכיחה.
  - ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.
- (2) באיזו משפחה ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת?
  - א. משפחה א'.
  - ב. משפחה ב'.
  - ג. בשתיהן ההכנסה החציונית שווה להכנסה הממוצעת.
  - ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.
- (3) באיזו משפחה סטית התקן של ההכנסה החודשית גבוהה יותר?
  - א. משפחה א'.
  - ב. משפחה ב'.
  - ג. לשתיהן אותה סטית תקן.
  - ד. לא ניתן לדעת – אין מספיק נתונים.

#### הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 4-6:

להלן נתונים חלקיים של טבלת שכיחויות:  
כמו כן, נתון כי הממוצע הוא 1.66.

$F(x)$	$x$
?	0
10	1
6	2
15	3
?	4
50	סה"כ

4) השכיח של הנתונים הוא:

- א. 0.
- ב. 15.
- ג. ישנם שני שכיחים: 0 ו-3.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של השכיח.

5) חציון הנתונים הוא:

- א. 2.
- ב. 1.5.
- ג. 25.5.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

6) הטווח של הנתונים:

- א. 11.
- ב. 3.
- ג. 4.
- ד. על סמך הנתונים החלקיים אי אפשר לקבוע מה יהיה ערכו של החציון.

7) בהתפלגות אסימטרית ימנית של משתנה כמותי רציף, הערך המתאים למאון ה-30, ציון התקן שלו הוא בהכרח:

- א. שלילי.
- ב. חיובי.
- ג. אפס.
- ד. לא ניתן לדעת ללא הנתונים.

- 8) סדרת נתונים סטטיסטיים מונה 10 תצפיות. נתון כי סדרת הנתונים סימטרית סביב הממוצע. ממוצע הסדרה-40 ושונות הסדרה-100. בשלב מאוחר יותר נוספו שתי תצפיות נוספות לסדרה : 50 ו-30. השונות של 12 התצפיות :
- א. תקטן.
  - ב. תגדל.
  - ג. לא תשתנה.
  - ד. לא ניתן לחשב את השונות ללא ידיעת התצפיות.

#### הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 9-10:

בחברת "טיק" המשכורת הממוצעת היא 4,600 ₪ וסטיית התקן של משכורת זו הינה 200 ₪. לאחר מו"מ עם ועד עובדי ההנהלה סוכם כי המשכורת תוכפל פי 1.5.

- 9) מהי המשכורת הממוצעת החדשה (ב-₪)?
- א. 2,300.
  - ב. 6,900.
  - ג. 4,650.
  - ד. 4,600.
  - ה. חסרים נתונים כדי לדעת.
- 10) מהי סטיית התקן של המשכורת לאחר יישום המו"מ לגבי השכר (ב-₪)?
- א. 200.
  - ב. 300.
  - ג. 675.
  - ד. לא ניתן לדעת.
- 11) הוספת גודל קבוע לכל תצפיות סדרת נתונים :
- א. תגדיל את סטיית התקן.
  - ב. תקטין את סטיית התקן.
  - ג. לא תשנה את סטיית התקן.
  - ד. לא ניתן לדעת.



### הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 12-14:

להלן נתונים על ציוני תלמידים שנבחנו במועדים שונים בסטטיסטיקה:

שם התלמיד	ציון	ממוצע הציונים במועד בו נבחן	סטיית התקן של הציונים במועד בו נבחן
צבי	50	50	12
סטף	82	80	5
שרית	65	60	15
לובה	60	63	1.5
מיטב	70	70	10

12) התלמיד הטוב ביותר ביחס לנבחנים באותו מועד בו נבחן הוא:

- א. מיטב.
- ב. צבי.
- ג. לובה.
- ד. שרית.
- ה. סטף.

13) פנינה נבחנה עם סטף וציון התקן שלה שווה לציון התקן של שרית לכן ציונה הוא:

- א. 80.55.
- ב. 65.
- ג. 80.
- ד. 81.66.

14) איזו כיתה היא ההומוגנית ביותר. הכיתה של:

- א. מיטב.
- ב. צבי.
- ג. לובה.
- ד. שרית.
- ה. סטף.

**הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 15-18:**

בבדיקת פתע של משרד הבריאות במפעל שוקולד, נמצא ש:

7	6	5	4	3	2	1	0	שוקולד פגום
8	10	11	13	12	48	63	35	מס' קופסאות

**15** מהו החציון של מספר הפגומים בקופסא:

- א. 1.
- ב. 2.
- ג. 4.
- ד. לא ניתן לדעת.

**16** מהו הרבעון התחתון של מספר הפגומים בקופסא?

- א. 1.
- ב. 2.
- ג. 3.
- ד. 4.
- ה. לא ניתן לדעת.

**17** מספר הפגומים בקופסא הוא משתנה:

- א. סדר.
- ב. שמי.
- ג. כמותי בדיד.
- ד. כמותי רציף.

**18** השכיח של מספר הפגומים בקופסא:

- א. 63.
- ב. 1.
- ג. 200.
- ד. לא ניתן לדעת.

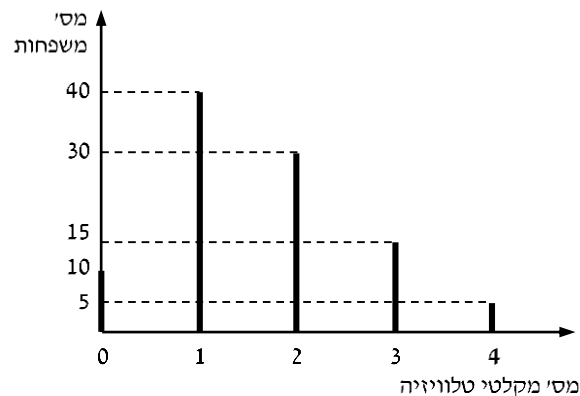
**19** ביחס לציר המספרים, רוב הערכים בהתפלגות א-סימטרית ימנית נמצאים:

- א. בערכים הגבוהים.
- ב. בחלוקה זהה בין הערכים הגבוהים והנמוכים.
- ג. בערכים הנמוכים.
- ד. לא ניתן לדעת.
- ה. אף לא תשובה מהנ"ל נכונה.

- 20** בוצע מחקר על מספר העובדים בחברות מזון לעומת חברות תקשורת. החציון והממוצע בשתיהן שווה 8. איזה מהטענות הבאות היא הנכונה והמלאה ביותר:
- השכיחות ב-2 החברות זהה אך שונה מ-8.
  - השכיח ב-2 החברות זהה אך לא ניתן לדעת מהו.
  - השכיח בשתי חברות הינו בהכרח 8.
  - שכיח בחברה אחת שונה מ-8 ובשנייה הוא 8.
  - אף תשובה אינה נכונה.

### הנתונים הבאים מתייחסים לשאלות 21 עד 25:

נערך סקר על מספר מקלטי הטלוויזיה הנמצאים בבית. תוצאות הסקר נתונות בדיאגרמת מקלות הבאה:



### 21 המשתנה הנחקר כאן הוא:

- משתנה שמי.
- משתנה מסולם סדר.
- משתנה כמותי בדיד.
- משתנה כמותי רציף.

### 22 הטווח של ההתפלגות הוא:

- 35.
- 4.
- 3.
- 2.

**(23) ממוצע מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה הוא :**

- א. 1.65
- ב. 1.5
- ג. 1
- ד. 2

**(24) השכיח של התפלגות זו היא :**

- א. 40
- ב. 1.5
- ג. 1
- ד. 2

**(25) מסתבר שיש בין 2 ל-5 משפחות נוספות שאין להם מקלטי טלויזיה ויש לצרף את המשפחות הללו להתפלגות. כיצד הנתון זה ישפיע על סטיית התקן?**

- א. יקטין אותו.
- ב. יגדיל אותו.
- ג. לא ישנה אותו.
- ד. אין לדעת.

### תשובות סופיות:

1) א'	2) ג'	3) ג'	4) ג'	5) ב'
6) ג'	7) א'	8) ג'	9) ב'	10) ב'
11) ג'	12) ה'	13) ד'	14) ג'	15) ב'
16) א'	17) ג'	18) ב'	19) ג'	20) ה'
21) ג'	22) ב'	23) א'	24) ג'	25) ב'

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 13 - התפלגויות רציפות מיוחדות - התפלגות נורמלית

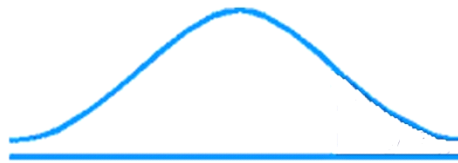
תוכן העניינים

1. כללי ..... 42

## התפלגויות רציפות מיוחדות – התפלגות נורמלית:

### רקע:

התפלגות נורמלית הינה התפלגות של משתנה רציף. ישנם משתנים רציפים מסוימים שנהוג להתייחס אליהם כנורמליים כגון: זמן ייצור, משקל תינוק ביום היוולדו ועוד. פונקציית הצפיפות של ההתפלגות הנורמלית נראית כמו פעמון:



לעקומה זו קוראים גם עקומת גאוס ועקומה אחת נבדלת מהשנייה באמצעות הממוצע וסטיית התקן שלה.

אלה הם הפרמטרים שמאפיינים את ההתפלגות:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

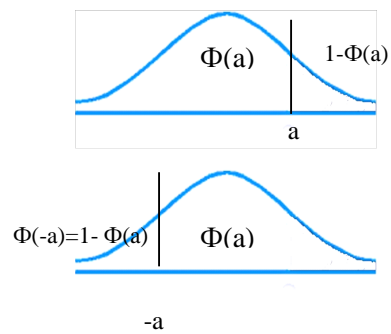
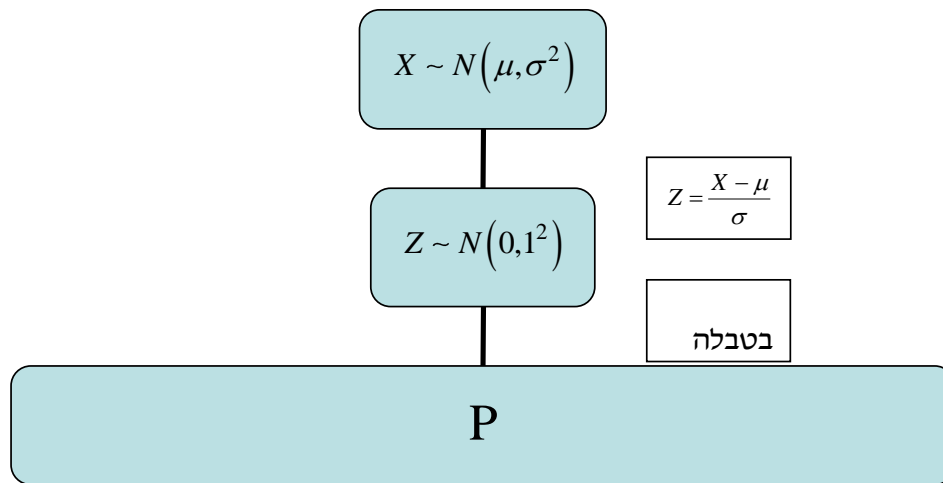
$$\text{נוסחת פונקציית הצפיפות: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

כדי לחשב הסתברויות בהתפלגות נורמלית יש לחשב את השטחים הרלוונטיים שמתחת לעקומה. כדי לחשב שטחים אלה נמיר כל התפלגות נורמלית להתפלגות נורמלית סטנדרטית על ידי תהליך הנקרא תקנון. התפלגות נורמלית סטנדרטית היא התפלגות נורמלית שהממוצע שלה הוא אפס וסטיית התקן היא אחת, והיא תסומן באות  $Z$ :  $Z \sim N(0, 1^2)$ .

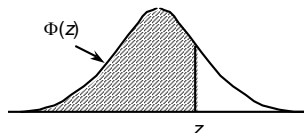
$$\text{תהליך התקנון מבוצע על ידי הנוסחה הבאה: } Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

אחרי תקנון מקבלים ערך הנקרא ציון תקן. ציון התקן משמעו בכמה סטיות תקן הערך סוטה מהממוצע.

לאחר חישוב ציון התקן של ערך מסוים נעזרים בטבלה של ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית לחישוב השטח הרצוי, ובאופן כללי נתאר את הסכמה הבאה:



טבלת ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית – ערכי  $\Phi(z)$  :



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995



דוגמה (הפתרון בהקלטה):

משקל חפיסות שוקולד המיוצרות בחברה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 גרם בסטיית תקן של 8 גרם.

- (1) מה אחוז חפיסות השוקולד ששוקלות מתחת ל-110 גרם?
- (2) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מעל 110 גרם?
- (3) מה אחוז חפיסות השוקולד השוקלות מתחת ל 92 גרם?
- (4) מהו המשקל ש-90% מהחפיסות בקו הייצור שוקלים פחות מהם?

## שאלות:

- (1) הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.
- מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-182.4 ס"מ?
  - מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
  - מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
  - מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל-170 ס"מ?
  - מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?
- (2) נתון שהזמן שלוקח לתרופה מסוימת להשפיע מתפלג נורמלית עם ממוצע של 30 דקות ושונות של 9 דקות רבועות.
- מהי פרופורציית המקרים בהן התרופה תעזור אחרי יותר משעה?
  - מה אחוז מהמקרים שבהן התרופה תעזור בין 35 ל-37 דקות?
  - מה הסיכוי שהתרופה תעזור בדיוק תוך 36 דקות?
  - מה שיעור המקרים שבהן ההשפעה של התרופה תסטה מ-30 דקות בפחות מ-3 דקות?
- (3) המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
- מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ-55 ק"ג?
  - מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
  - מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל-70 ק"ג?
  - לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ-4 ק"ג?
  - מה הסיכוי שאדם אקראי ישקול מתחת ל-140 ק"ג?
- (4) משקל תינוקות ביום היוולדם מתפלג נורמלית עם ממוצע של 3300 גרם וסטית תקן 400 גרם.
- מצאו את העשירון העליון.
  - מצאו את האחוזון ה-95.
  - מצאו את העשירון התחתון.

- (5) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225.
- מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
  - מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
  - מהו הציון ש-20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
  - מהו האחוזון ה-20?
  - מהו הציון ש-5% מהנבחנים מקבלים מתחתיו?

### תשובות סופיות:

- |     |           |           |           |           |         |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|---------|
| (1) | א. 89.25% | ב. 2.28%  | ג. 0      | ד. 50%    | ה. 50%  |
| (2) | א. 0%     | ב. 3.76%  | ג. 0%     | ד. 68.26% |         |
| (3) | א. 26.43% | ב. 89.44% | ג. 39.44% | ד. 0.383  |         |
|     | ה. 100%   |           |           |           |         |
| (4) | א. 3812.8 | ב. 3958   | ג. 2787.2 |           |         |
| (5) | א. 119.2  | ב. 80.8   | ג. 112.6  | ד. 87.4   | ה. 75.3 |

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 14 - הסקה סטטיסטית - הקדמה

תוכן העניינים

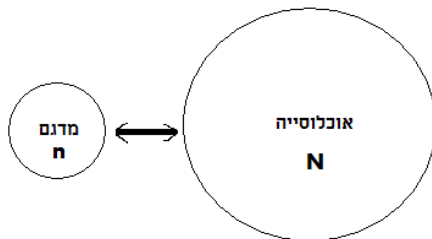
1. כללי ..... 48

## הסקה סטטיסטית – הקדמה:

### רקע:

#### אוכלוסייה:

קבוצה שאליה מפנים שאלה מחקרית. למשל, חברת תרופות שמעוניינת לפתח תרופה למחלת הסוכרת מתעניינת באוכלוסיית חולי הסוכרת בעולם.



#### מדגם:

חלק מתוך האוכלוסייה. למשל, אם נדגום באקראי 10 אנשים מתוך חולי הסוכרת אז זהו מדגם מתוך אוכלוסיית חולי הסוכרת.

במקרים רבים אין אפשרות לחקור את כל האוכלוסייה כיוון שאין גישה לכולה, היא גדולה מידי, אנו מוגבלים בזמן ובאמצעים טכניים ולכן מבצעים מדגם במטרה לבצע הסקה סטטיסטית מהמדגם לאוכלוסייה. הדגימה בקורס תהיה דגימה מקרית - הכוונה לדגימה שבה לכל תצפית באוכלוסייה יש את אותו סיכוי להיכלל במדגם.

#### סטטיסטי:

גודל המחושב על המדגם.

#### פרמטר:

גודל המתאר את האוכלוסייה.

### הסימונים לפרמטר וסטטיסטי הם שונים:

סטטיסטי (מדגם)	פרמטר (אוכלוסייה)	ממוצע
$\bar{X}$	$\mu$	
$\hat{p}$	$P$	פרופורציה (שכיחות יחסית)

פרמטר הוא גודל קבוע גם אם אנו לא יודעים אותו סטטיסטי הוא משתנה ממדגם למדגם ולכן יש לו התפלגות הנקראת התפלגות הדגימה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

25% מאזרחי המדינה תומכים בהצעת החוק של חבר כנסת מסוים. הוחלט לדגום 200 אזרחים ומתוכם לבדוק מהו אחוז התומכים בהצעת החוק.

- מי האוכלוסייה?
- מה המשתנה?
- מה הפרמטרים?
- מהו גודל המדגם?
- מהו הסטטיסטי שמתכננים להוציא מהמדגם?
- האם הפרמטר או הסטטיסטי הוא משתנה מקרי?

## שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו גודל המדגם?
- (2) להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה ב"שוב "העוגן". נגדיר את  $X$  להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית. מתכננים לדגום מאוכלוסייה זו 4 משפחות ולהתבונן בממוצע מספר מקלטי הטלויזיה במדגם.
- מי היא האוכלוסייה ומהו המשתנה הנחקר?
  - מהו הסטטיסטי שיילקח מהמדגם ומה סימונו?

מספר המשפחות	מספר מקלטים
50	0
250	1
350	2
300	3
50	4
סך הכול $N = 1000$	

- (3) נתון כי 20% מהשכירים במדינה הם אקדמאיים. נבחרו באקראי 10 שכירים באותה אוכלוסייה ומתכננים לפרסם את מספר האקדמאיים שנדגמו.
- מהי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה באוכלוסייה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו הסטטיסטי?

## תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון. ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.
- (2) א. האוכלוסייה: 1000 משפחות ב"שוב העוגן, המשתנה הנחקר: מס' מקלטים. ב.  $\bar{X}$  = ממוצע מדגם.
- (3) א. השכירים במדינה. ב. השכלה: אקדמאי, לא אקדמאי. ג. שיעור ההצלחות באוכלוסייה: 0.2. ג. מס' האקדמאים במדגם.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 15 - התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי

תוכן העניינים

1. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי ..... 51



## התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי:

### רקע:

בפרק זה נדון בהתפלגות של ממוצע המדגם:  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

מכיוון שממדגם למדגם אנו יכולים לקבל ממוצע מדגם שונה, אזי ממוצע המדגם הוא משתנה מקרי ויש לו התפלגות.

גדלים המתארים התפלגות כלשהי או אוכלוסייה כלשהי נקראים פרמטרים. להלן רשימה של פרמטרים החשובים לפרק זה:

ממוצע האוכלוסייה נסמן ב- $\mu$  (נקרא גם תוחלת).

שונות אוכלוסייה נסמן ב- $\sigma^2$ .

סטיית תקן של אוכלוסייה:  $\sigma$ .

### תכונות התפלגות:

ממוצע כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לממוצע האוכלוסייה:  $E(\bar{x}) = \mu_{\bar{x}} = \mu$ .

שונות כל ממוצעי המדגם האפשריים שווה לשונות האוכלוסייה מחולק ב- $n$ .

תכונה זו נכונה רק במדגם מקרי:  $V(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ .

יש יחס הפוך בין גודל המדגם לבין שונות ממוצעי המדגם.

אם נוציא שורש לשונות נקבל סטיית תקן של ממוצע המדגם שנקראת גם

טעות תקן:  $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

השכר הממוצע במשק הינו 9000 ₪ עם סטיית תקן של 4000. דגמו באקראי 25 עובדים.

א. מיהי אוכלוסיית המחקר? מהו המשתנה הנחקר?

ב. מהם הפרמטרים של האוכלוסייה?

ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

**דגימה מהתפלגות נורמאלית:**

אם נדגום מתוך אוכלוסייה שהמשתנה בה מתפלג נורמאלית עם ממוצע  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ .

$$\text{ממוצע המדגם גם יתפלג נורמאלית: } Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \quad , \quad \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.  
מה ההסתברות שבמדגם של 4 תינוקות אקראיים בעת הולדתם המשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-3.5 ק"ג?

**משפט הגבול המרכזי:**

אם אוכלוסייה מתפלגת כלשהו עם ממוצע  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$  אזי עבור מדגם מספיק

$$\text{גדול } (n \geq 30) \text{ ממוצע המדגם מתפלג בקירוב נורמאלי: } \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משקל חפיסת שוקולד בקו ייצור מתפלג עם ממוצע 100 גרם וסטיית תקן של 4 גרם.  
דגמו מקו הייצור 36 חפיסות שוקולד אקראיות.  
מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של חפיסות השוקולד שנדגמו יהיה מתחת ל-102 גרם?

## שאלות:

- (1) מתוך כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א נדגמו שני סטודנטים. נתון שממוצע הציונים של כלל הסטודנטים היה 78 עם סטיית תקן של 15.
- מיהי האוכלוסייה?
  - מה המשתנה?
  - מהם הפרמטרים?
  - מהו גודל המדגם?
  - מהו תוחלת ממוצע המדגם?
  - מהי טעות התקן?
- (2) משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלי עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.
- מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם? נתון כי ביום מסוים נולדו 4 תינוקות.
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
  - מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?
  - הסבירו ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היה מדובר על יותר מ-4 תינוקות?
- (3) הגובה של המתגייסים לצה"ל מתפלג נורמאלי עם תוחלת של 175 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ. ביום מסוים התגייסו 16 חיילים.
- מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה לפחות 190 ס"מ?
  - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יהיה בדיוק 180 ס"מ?
  - מה ההסתברות שהגובה הממוצע שלהם יסטה מתוחלת הגבהים בפחות מ-5 ס"מ?
  - מהו הגובה שבהסתברות של 90% הגובה הממוצע של המדגם יהיה נמוך ממנו?

- (4) הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים. לצורך הפתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלי.
- א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
- ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה גבוה ממנו?
- ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
- ד. כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם האדם היה נוסע לעבודה 6 פעמים בשבוע?
- (5) נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלי עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
- ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
- ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?
- ד. בקבוקי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
- (6) משתנה מתפלג נורמאלי עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
- א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
- ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
- הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.
- (7) לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪.
- מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

8) אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.

א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. היעזרו במשפט הגבול המרכזי.

9) נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . דגמו 5 תצפיות מאותה התפלגות והתבוננו בממוצע

המדגם  $\bar{X}$ . לכן:  $P(\bar{X} > \mu)$  יהיה (בחרו בתשובה הנכונה):

א. 0.

ב. 0.5.

ג. 1.

ד. לא ניתן לדעת.

10) נתון ש- $X$  מתפלג כלשהו עם תוחלת  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ .

החליטו לבצע מדגם בגודל 200 מתוך ההפלגות הנתונה לפי משפט הגבול המרכזי מתקיים (בחרו בתשובה הנכונה):

א.  $X \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .

ב.  $\mu \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .

ג.  $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

ד.  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{200}\right)$ .

11) נתון ש- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . אם נדגום  $n$  תצפיות מתוך ההתפלגות ונגדיר:  $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ,

אזי (בחרו בתשובה הנכונה):

א.  $\mu$  ו- $\bar{X}$  יהיו משתנים מקריים.

ב.  $\mu$  יהיה משתנה מקרי ו- $\bar{X}$  קבוע.

ג.  $\bar{X}$  יהיה משתנה מקרי ו- $\mu$  קבוע.

ד.  $\mu$  ו- $\bar{X}$  יהיו קבועים.

## תשובות סופיות:

- (1) א. כלל הסטודנטים במכללה שסיימו סטטיסטיקה א. ב. ציון.  
 ג. ממוצע: 78, סטיית תקן: 15. ד. 2.  
 ה. 78. ו. 10.6.
- (2) א. 0.8413. ב. 0.0013. ג. 0. ד. 0.1974.
- (3) א. 0. ב. 0. ג. 0.9544. ד. 178.205.
- (4) א. 0.0465. ב. 27.71. ג. 0.2628. ד. התשובה הייתה קטנה.
- (5) א. 0. ב. 0.1587. ג. 0.1587. ד. 0.5.
- (6) א. 0.5468. ב. 0.6826.
- (7) 0.0475.
- (8) א. 0.9772. ב. 0.0228. ג. 271.
- (9) ב'.
- (10) ד'.
- (11) ג'.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 16 - מושגי יסוד באמידה

תוכן העניינים

1. כללי ..... 57

## מושגי יסוד באמידה:

### רקע:

כזכור מהמפגש הקודם, פרמטר הוא גודל המתאר את האוכלוסייה או התפלגות מסוימת. כמו ממוצע הגבהים בקרב מתגייסים לצה"ל -  $\mu$ . כמו פרופורציית התומכים בממשלה בקרב אזרחי המדינה -  $p$ . בדרך כלל הפרמטרים הם גדלים שאינם ידועים באמת, ולכן מבצעים מדגמים במטרה לאמוד אותם. אין אפשרות לחשב אותם הניסיון הוא בלהעריך כמה הם שווים ככל שניתן.

- נסמן באופן כללי פרמטר באות  $\theta$  ואומד ב- $\hat{\theta}$ .  $\hat{\theta}$  הוא סטטיסטי המחושב על המדגם ובאמצעותו נאמוד את  $\theta$ .
- שגיאת אמידה:  $|\hat{\theta} - \theta|$  - ההפרש בין האומד לאמת (הפרמטר).

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

בכנסת ה-19 קיבלה מפלגת העבודה 15 מנדטים. בערוץ 10 ברגע סגירת הקלפיות העריכו את מספר המנדטים של המפלגה להיות 17 מנדטים וזאת על סמך תוצאות מדגם של הערוץ.

- א. מה הפרמטר בדוגמה זו?
  - ב. מהי טעות האמידה של ערוץ 10?
- $\hat{\theta}$  יהיה אומד חסר הטיה ל- $\theta$  אם התוחלת של  $\hat{\theta}$  תהיה שווה ל- $\theta$ :  $E(\hat{\theta}) = \theta$ .
  - טעות התקן של אומד היא סטיית התקן שלו, כלומר:  $\sigma(\hat{\theta}) = S.E$ .



**פרמטרים מרכזיים והאומדים שלהם:****ממוצע האוכלוסייה  $\mu$ :**

האומד הנקודתי שלו יהיה: ממוצע המדגם:  $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ .

$E(\bar{x}) = \mu$  לכן  $\bar{x}$  הינו אומד חסר הטיה ל- $\mu$ . כמו כן, טעות תקן:  $\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = SE$ .

**פרופורציה באוכלוסייה  $p$ :**

האומד הנקודתי שלו יהיה: פרופורציה במדגם:  $\hat{p} = \frac{y}{n}$ .

$E(\hat{p}) = p$ , לכן  $\hat{p}$  הינו אומד חסר הטיה ל- $p$ . כמו כן טעות התקן:  $\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ .

**שונות האוכלוסייה  $\sigma^2$ :**

האומד הנקודתי שלו יהיה:  $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ .

$E(S^2) = \sigma^2$  ולכן  $S^2$  הינו אומד חסר הטיה ל- $\sigma^2$ :  $S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$ .

**הערה:** אומד הוא הנוסחה הכללית לאמידת הפרמטר ואומדן הוא הערך הספציפי שהתקבל במדגם מסוים.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

נדגמו 10 משפחות בתל אביב ונבדק עבור כל משפחה מספר הילדים שלה.  
להלן התוצאות שהתקבלו: 2, 1, 3, 2, 1, 4, 5, 2, 1, 3.  
אמדו באמצעות אומדים חסרי הטיה את הפרמטרים הבאים:

1. ממוצע מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
2. שונות מספר הילדים למשפחה בתל אביב.
3. פרופורציית המשפחות בנות שני ילדים.

## שאלות:

- (1) מתוך 500 טירונים, נמצאו 120 בעלי שברי הליכה. נתון שהסיכוי שטירון יהיה עם שבר הליכה הוא 0.25.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
  - מהי טעות התקן של האומדן כשהמדגם בגודל 500?
  - מהו האומדן לפרמטר?
  - מהי טעות האמידה?
- (2) לפי נתוני היצרן, מקרר צורך בממוצע 2400 וואט לשעה עם סטיית תקן של 500 וואט לשעה.
- במדגם של 25 מקררים של היצרן התקבל ממוצע של 2342 וואט לשעה.
- מהי האוכלוסייה המוצגת בשאלה? מהם הפרמטרים שלה?
  - מהי טעות התקן של האומדן?
  - מהו האומדן לפרמטר?
  - מהי טעות האמידה?
- (3) נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו: 175, 168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177.
- מצאו אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
  - מצאו אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
  - מצאו אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.
- (4) נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים.
- להלן התוצאות שהתקבלו:  $\sum_{i=1}^{20} X_i = 162$ ,  $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2$ .
- אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
  - אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.
- (5) במטרה לאמוד את ממוצע האוכלוסייה, דגמו תצפיות בלתי תלויות מהאוכלוסייה וחישבו את הממוצע שלהם. מהי טעות התקן?
- סטיית התקן של האוכלוסייה.
  - סטיית התקן של ממוצע האוכלוסייה.
  - סטיית התקן של המדגם.
  - סטיית התקן של ממוצע המדגם.

6) משקל הממוצע של אוכלוסייה מסוימת הוא 75 ק"ג עם שונות של 25. אם יבחרו כל המדגמים האפשריים בגודל 10 מאוכלוסייה זו סטיית התקן של ממוצעי המדגמים תהייה:

- א. 3.
- ב. 2.5.
- ג. 1.581.
- ד. אין מספיק נתונים לדעת.

7) במדגם מקרי, מתי סכום ריבועי הסטיות מהממוצע,  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ , מחולק ב- $n-1$ ?

- א. כאשר  $n$  קטן.
- ב. כאשר תצפיות המדגם אינן בלתי תלויות.
- ג. כאשר האוכלוסייה אינה מתפלגת נורמאלית.
- ד. כאשר מעוניינים באומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה ממנה הוצא המדגם.
- ה. כאשר מעוניינים לחשב את שונות התפלגות הדגימה של ממוצע המדגם.

8)  $X_1, X_2, \dots, X_{16}$  מדגם מקרי מתוך אוכלוסייה בעלת ממוצע  $\mu$  לא ידוע ושונות:  $\sigma^2 = 64$ . טעות התקן של האומד ל- $\mu$  היא:

- א. 16.
- ב. 8.
- ג. 4.
- ד. 2.

9) מהו אומד חסר הטיה?

- א. אומד שערכו שווה לממוצע התפלגות הדגימה שלו.
- ב. אומד שערכו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ג. אומד שממוצע התפלגות הדגימה שלו שווה לערך הפרמטר באוכלוסייה.
- ד. אומד שהסיכוי שערכו יהיה גבוה מערך הפרמטר באוכלוסייה שווה לסיכוי שיהיה נמוך ממנו.



# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 17 - מבוא לבדיקת השערות על פרמטרים

תוכן העניינים

1. הקדמה.....	62
2. סוגי טעויות.....	66

## הקדמה:

### רקע:

תהליך של בדיקת השערות הוא תהליך מאד נפוץ בעולם הסטטיסטיקה. בבדיקת השערות על פרמטרים נעבוד לפי השלבים הבאים:

**שלב א:** נוהה את הפרמטר הנחקר.

**שלב ב:** נרשום את השערות המחקר.

השערת האפס המסומנות ב-  $H_0$ .

בדרך כלל השערת האפס מסמלת את אשר היה מקובל עד עכשיו, את השגרה, הנורמה.

השערה אלטרנטיבית (השערת המחקר) המסומנת ב-  $H_1$ .

ההשערה האלטרנטיבית מסמלת את החדשנות בעצם ההשערה האלטרנטיבית מדברת על הסיבה שהמחקר נעשה היא שאלת המחקר.

**שלב ג:** נבדוק האם התנאים לביצוע התהליך מתקיימים ונניח הנחות במידת הצורך.

**שלב ד:** נרשום את כלל ההכרעה. בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שנקרא כלל הכרעה. הכלל יוצר אזורי שנקראים:

1. **אזור דחייה:**

דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.

2. **אזור קבלה:**

קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה. כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי. אזור הדחייה מוכתב על ידי סיכון שלוקח החוקר מראש שנקרא רמת מובהקות ומסומן ב-  $\alpha$ .

**שלב ה:** בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולחשב את הסטטיסטי המתאים ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה.

**שלב ו:** להסיק מסקנה בהתאם לתוצאות המדגם.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום לידתם בישראל 3300 גרם. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20, \bar{X} = 3120, S = 280$$

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

## שאלות:

בשאלות הבאות, ענו על הסעיפים הבאים:

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מה המשתנה הנחקר?
- ג. מה הפרמטר הנחקר?
- ד. מהן השערות המחקר?

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5.
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
- (3) במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה למשפטים היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. מחקר מעוניין לבדוק האם השנה מקשים על הקבלה לפקולטה למשפטים.
- (4) בחודש ינואר השנה פורסם שאחוז האבטלה במשק הוא 8% במדגם עכשווי התקבל שמתוך 200 אנשים 6.5% מובטלים. רוצים לבדוק ברמת מובהקות של 5% האם כיום אחוז האבטלה הוא כמו בתחילת השנה.



## תשובות סופיות:

- (1) א. נבחנים בבגרות באנגלית.  
 ב. ציון.  
 ג. ממוצע הציונים בשיטת לימוד חדשה.  
 ד.  $H_0: \mu = 72$   
 $H_1: \mu > 72$
- (2) א. משקאות בבקבוק של חברה מסוימת.  
 ב. נפח משקה בסמ"ק.  
 ג. ממוצע נפח המשקה בבקבוק.  
 ד.  $H_0: \mu = 500$   
 $H_1: \mu < 500$
- (3) א. מועמדים לפקולטה למשפטים.  
 ב. משתנה דיכוטומי (התקבל, לא התקבל).  
 ג. אחוז הקבלה.  
 ד.  $H_0: p = 0.25$   
 $H_1: p < 0.25$
- (4) א. אזרחים בוגרים במשק.  
 ב. משתנה דיכוטומי (מובטל, עובד).  
 ג. אחוז האבטלה כיום.  
 ד.  $H_0: p = 0.08$   
 $H_1: p \neq 0.08$

## סוגי טעויות:

### רקע:

בתהליך של בדיקת השערות יוצרים כלל שניקרא כלל הכרעה.  
הכלל יוצר אזורים שנקראים:

1. אזור דחייה – דחייה של השערת האפס כלומר קבלה של האלטרנטיבה.
2. אזור קבלה – קבלה של השערת האפס ודחייה של האלטרנטיבה.

כלל ההכרעה מתבסס על איזשהו סטטיסטי.  
בתהליך יש ללכת לתוצאות המדגם ולבדוק האם התוצאות נופלות באזור הדחייה או הקבלה וכך להגיע למסקנה – המסקנה היא בעירבון מוגבל כיוון שהיא תלויה בכלל ההכרעה ובתוצאות המדגם. אם נשנה את כלל ההכרעה אז אנחנו יכולים לקבל מסקנה אחרת. אם נבצע מדגם חדש אז אנחנו עלולים לקבל תוצאה אחרת. לכן יתכנו טעויות במסקנות שלנו:

מציאות	הכרעה		
		$H_0$	$H_1$
	$H_0$	טעות מסוג 1 אין טעות	טעות מסוג 2 אין טעות
	$H_1$		

### הגדרת הטעויות:

טעות מסוג ראשון: להכריע לדחות את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_0$  נכונה.

טעות מסוג שני: להכריע לקבל את  $H_0$  למרות שבמציאות  $H_1$  נכונה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

אדם חשוד בביצוע עבירה ונתבע בבית המשפט.  
אילו סוגי טעויות אפשריות בהכרעת הדין?

## שאלות:

- (1) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25. בסופו של דבר הוחלט להכריע לטובת חברת המשקאות.
- א. רשמו את השערות המחקר.  
 ב. מה מסקנת המחקר?  
 ג. איזו סוג טעות יתכן וביצעו במחקר?
- (2) במחקר על פרמטר מסוים הוחלט בסופו של דבר לדחות את השערת האפס.
- א. האם ניתן לדעת אם בוצע טעות במחקר?  
 ב. מה סוג הטעות האפשרית?
- (3) לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. ישנה טענה שכיום ממוצע מספר הילדים במשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה. על סמך תוצאות המדגם נקבע שלא ניתן לקבוע שבאופן מובהק תוחלת מספר הילדים למשפחה קטנה כיום.
- א. מהי אוכלוסיית המחקר?  
 ב. מה המשתנה הנחקר?  
 ג. מה הפרמטר הנחקר?  
 ד. מה השערות המחקר?  
 ה. מה מסקנת המחקר?  
 ו. מהי סוג הטעות האפשרית במחקר?

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $H_0: \mu = 500$   
 ב. לא דחינו את  $H_0$ .  
 ג. טעות מסוג שני.
- (2) א. לא ניתן לדעת.  
 ב. טעות מסוג ראשון.
- (3) א. משפחות כיום.  
 ב. מס' הילדים.  
 ג. תוחלת מספר הילדים למשפחה כיום.  
 ד.  $H_0: \mu = 2.3$   
 $H_1: \mu < 2.3$   
 ה. לא לדחות את  $H_0$ . ו. טעות מסוג שני.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

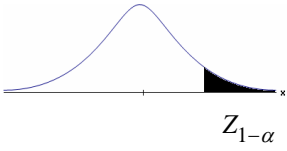
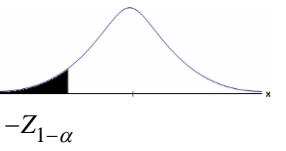
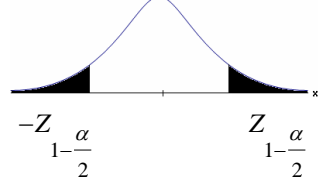
פרק 18 - בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע)

תוכן העניינים

1. בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסיה ידועה..... 68
2. מובהקות תוצאה - אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסיה ידועה)..... 72
3. בדיקת השערות על תוחלת ( ממוצע) כששונות האוכלוסיה לא ידועה..... 77
4. ניתוח פלטים..... 81

## בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה ידועה:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. $\sigma$ ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$ :	$Z_{\bar{x}} > Z_{1-\alpha}$  $Z_{1-\alpha}$ דוחים את $H_0$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\alpha}$  $-Z_{1-\alpha}$ דוחים את $H_0$	$Z_{\bar{x}} < -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ או $Z_{\bar{x}} > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ דוחים את $H_0$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

סטטיסטי המבחן:

חלופה אחרת לכלל הכרעה:

$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	נדחה $H_0$ אם מתקיים:
--	--	--	--------------------------

**דוגמה:**

יבול העגבניות מתפלג נורמלית עם תוחלת של 10 טון לדונם וסטיית תקן של 2.5 טון לדונם בעונה. משערים ששיטת זיבול חדשה תעלה את תוחלת היבול לעונה מבלי לשנות את סטיית התקן. נדגמו 4 חלקות שזוּבְלו בשיטה החדשה. היבול הממוצע שהתקבל היה 12.5 טון לדונם. בדקו את ההשערה ברמת מובהקות של 1%.

**פיתרון:**

אוכלוסייה: עגבניות.

המשתנה:  $X =$  יבול העגבניות בטון לעונה.

הפרמטר:  $\mu =$  תוחלת היבול בשיטת הזיבול החדשה.

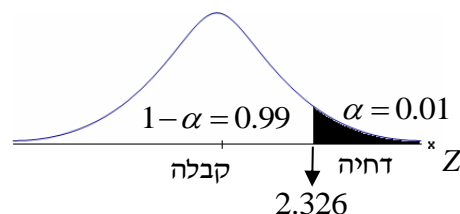
השערות:  
 $H_0: \mu = 10$   
 $H_1: \mu > 10$

תנאים:

1.  $X \sim N$ .

2.  $\sigma = 2.5$ .

כלל הכרעה:



נדחה את  $H_0$  אם  $Z_{\bar{x}} > 2.326$

תוצאות:  $n = 4$ ,  $\bar{x} = 12.5$

סטטיסטי המבחן:  $Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

נציב:  $Z_{\bar{x}} = \frac{12.5 - 10}{\frac{2.5}{\sqrt{4}}} = 2 < 2.326$

מסקנה:

לא נדחה  $H_0$  (נקבל  $H_0$ ).

ברמת מובהקות של 1% לא נוכל לקבל את הטענה ששיטת הזיבול החדשה מעלה את תוחלת היבול של העגבניות.

## שאלות:

- (1) ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהיה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (2) לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.
  - א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?
  - ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?
- (3) מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכיילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?
- (4) המשקל הממוצע של הספורטאים בתחום ספורט מסוים הוא 90 ק"ג, עם סטיית תקן 8 ק"ג. לפי דעת מומחים בתחום יש צורך בהורדת המשקל ובשימוש בדיאטה מסוימת שצריכה להביא להורדת המשקל. לשם בדיקת יעילות הדיאטה נלקח מדגם מקרי של 50 ספורטאים ובתום שנה של שימוש בדיאטה התברר שהמשקל הממוצע במדגם זה היה 84 ק"ג. יש לבדוק בר"מ של 10%, האם הדיאטה גורמת להורדת המשקל.
- (5) לפי מפרט נתון, על עובי בורג להיות 4 מ"מ עם סטיית תקן של 0.2 מ"מ. במדגם של 25 ברגים העובי הממוצע היה 4.07 מ"מ. קבעו ברמת מובהקות 0.05, האם עובי הברגים מתאים למפרט. הניחו כי עובי של בורג מתפלג נורמלית וסטיית התקן של עובי בורג היא אכן 0.2 מ"מ.
- (6) במחקר נמצא שתוצאה היא מובהקת ברמת מובהקות של 5% מה תמיד נכון? בחרו בתשובה הנכונה.
  - א. הגדלת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
  - ב. הגדלת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.
  - ג. הקטנת רמת המובהקות לא תשנה את מסקנת המחקר.
  - ד. הקטנת רמת המובהקות תשנה את מסקנת המחקר.

(7) חוקר ערך מבחן דו צדדי ברמת מובהקות של  $\alpha$  והחליט לדחות את השערת האפס.

אם החוקר היה עורך מבחן צדדי ברמת מובהקות של  $\frac{\alpha}{2}$  אזי בהכרח:

- א. השערת האפס הייתה נדחית.
- ב. השערת האפס הייתה לא נדחית.
- ג. לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו במקרה זה.

(8) שני סטטיסטיקאים בדקו השערות:  $H_0: \mu = \mu_0$  כנגד  $H_1: \mu > \mu_0$ ,

עבור שונות ידועה ובאותה רמת מובהקות.

שני החוקרים קבלו אותו ממוצע במדגם אך לחוקר א' היה מדגם בגודל 100 ולחוקר ב' מדגם בגודל 200.

- א. אם חוקר א' החליט לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.
- ב. אם חוקר א' יחליט לא לדחות את  $H_0$ , מה יחליט חוקר ב'? נמקו.

### תשובות סופיות:

(1) נקבל  $H_0$ , בר"מ של 5% לא נקבל את הטענה של המורה ששיטת הלימוד שלו מעלה את ממוצע הציונים.

(2) א. נדחה  $H_0$ , בר"מ של 2.5% נקבל את תלונת אגודת הצרכנים בדבר הפחתת נפח המשקה בבקבוק.

ב. הגדלנו את רמת המובהקות לכן אנחנו נשארים בדחייה של  $H_0$  והמסקנה לא תשתנה.

(3) נדחה  $H_0$ , בר"מ של 5% נקבע שהמכונה לא מאופסת.

(4) נדחה  $H_0$ , בר"מ של 0.1 נקבל את הטענה שהדיאטה יעילה ומפחיתה את המשקל הממוצע.

(5) נקבל  $H_0$ , בר"מ של 0.05 נכריע שתוחלת עובי הבורג מתים למפרט.

(6) א'.

(7) ג'.

(8) א. לדחות. ב. לא ניתן לדעת.



## מובהקות תוצאה – אלפא מינימלית (ששונות האוכלוסייה ידועה):

### רקע:

דרך נוספת להגיע להכרעות שלא דרך כלל הכרעה, היא דרך חישוב מובהקות התוצאה:

באמצעות תוצאות המדגם מחשבים את מובהקות התוצאה שמסומן ב- $p_v$ . את רמת המובהקות החוקר קובע מראש לעומת זאת, את מובהקות התוצאה החוקר יוכל לחשב רק אחרי שיהיו לו את התוצאות.

המסקנה של המחקר תקבע לפי העיקרון הבא: אם  $p_v \leq \alpha$ , דוחים את  $H_0$ . מובהקות התוצאה זה הסיכוי לקבלת תוצאות המדגם וקיצוני מתוצאות אלה בהנחת השערת האפס.

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = P_{H_0}$ .

אם ההשערה היא דו צדדית:

(לקבל את תוצאות המדגם וקיצוני)  $p_v = 2P_{H_0}$ .

מובהקות התוצאה היא גם האלפא המינימלית לדחיית השערת האפס.

שערת האפס: השערה אלטרנטיבה:		$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	
$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$	
1. $\sigma$ ידועה		תנאים:	
2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		p-value	
$P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x})$	$P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x})$	אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \geq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} > \mu_0$ אם $2 \cdot P_{H_0}(\bar{X} \leq \bar{x}) \Leftarrow \bar{x} < \mu_0$	

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \quad \bar{X} \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{כאשר בהנחת השערת האפס:}$$

**דוגמה:**

המשקל הממוצע של מתגייסים לצבא לפני 20 שנה היה 65 ק"ג. מחקר מעוניין לבדוק האם כיום המשקל הממוצע של מתגייסים גבוה יותר. נניח שמשקל המתגייסים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 12 ק"ג. במדגם של 16 מתגייסים התקבל משקל ממוצע של 71 ק"ג.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה המסקנה אם רמת המובהקות היא 5% ואם רמת המובהקות היא 1%?

**פתרון:**

א. אוכלוסייה: המתגייסים לצבא כיום.

משתנה:  $X$  = משקל בק"ג.

פרמטר:  $\mu$ .

השערות:  
 $H_0: \mu = 65$   
 $H_1: \mu > 65$

תנאים:

1.  $X \sim N$ .

2.  $\sigma = 12$ .

תוצאות מדגם:

$$n = 16$$

$$\bar{X} = 71$$

$$P_V = P_{H_0} \left( \begin{array}{c} \text{לתוצאות} \\ \text{המדגם} \\ \text{וקיצוני} \end{array} \right) = P_{H_0} (\bar{X} \geq 71) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$Z_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{71 - 65}{\frac{12}{\sqrt{16}}} = 2$$

$$\alpha_{\min} = 0.0228$$

## שאלות:

- (1) להלן השערות של מחקר:  $H_0: \mu = 70$ ,  $H_1: \mu > 70$ . המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות:  $n = 100$ ,  $\bar{x} = 74$ . מהי מובהקות התוצאה?
- (2) השכר הממוצע במשק בשנת 2012 היה 8800 ₪ עם סטיית תקן 2000. במדגם שנעשה אתמול על 100 עובדים התקבל שכר ממוצע 9500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה עליה בשכר. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט שחלה עליה בשכר הממוצע במשק?
- (3) אדם חושד שחברת ממתקים לא עומדת בהתחייבויותיה, ומשקלו של חטיף מסוים אותו הוא קונה מדי בוקר נמוך מ-100 גרם. חברת הממתקים טוענת מצידה שהיא אכן עומדת בהתחייבויותיה. ידוע כי סטיית התקן של משקל החטיף היא 12 גרם. האדם מתכוון לשקול 100 חפיסות חטיפים ולאחר מכן להגיע להחלטה. לאחר הבדיקה הוא קיבל משקל הממוצע של 98.5 גרם.
- א. רשמו את השערות המחקר.
- ב. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה דוחים את השערת האפס?
- ג. מהי רמת המובהקות המקסימלית עבורה נקבל את השערת האפס?
- ד. מה המסקנה ברמת מובהקות של 5?
- (4) מכונה לחיתוך מוטות במפעל חותכת מוטות באורך שמתפלג נורמלית עם תוחלת אליה כוונה המכונה וסטיית תקן 2 ס"מ. ביום מסוים כוונה המכונה לחתוך מוטות באורך 80 ס"מ. אחראי האיכות מעוניין לבדוק האם המכונה מכוילת. לצורך כך נדגמו מקו הייצור 16 מוטות שנחתכו אורכן הממוצע היה 81.7 ס"מ.
- א. מהי רמת המובהקות המינימלית עבורה נכריע שהמכונה לא מכוילת?
- ב. אם נוסיף עוד תצפית שערכה יהיה 82 ס"מ, כיצד הדבר ישפיע על התשובה של הסעיף הקודם?
- ג. הכרע ברמת מובהקות של 5% האם המכונה מכוילת.
- (5) אם מקבלים בחישובים אלפא מינימלית (P value) קטנה מאד, סביר להניח כי החוקר ידחה את השערת האפס בקלות. נכון/לא נכון? נמק.

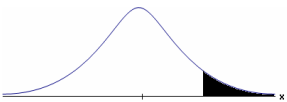
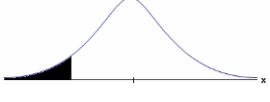
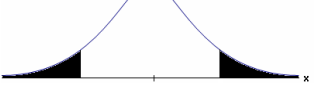
- (6) בבדיקת השערות התקבל שה-  $p\text{-value} = 0.02$ .  
 מה תהיה מסקנת חוקר המשתמש ברמת מובהקות 1%?  
 בחרו בתשובה הנכונה.
- א. יקבל את השערת האפס בכל מקרה.
  - ב. ידחה את השערת האפס מקרה.
  - ג. ידחה את השערת האפס רק אם המבחן הנו דו צדדי.
  - ד. לא ניתן לדעת כי אין מספיק נתונים.
- (7) מובהקות התוצאה (PV) היא גם (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. רמת המובהקות המינימאלית לדחות השערת האפס.
  - ב. רמת המובהקות המקסימאלית לדחיית השערת האפס.
  - ג. רמת המובהקות שנקבעת מראש על ידי החוקר שטרם קיבל את תוצאות המחקר.
  - ד. רמת המובהקות המינימאלית לאי דחיית השערת האפס.
- (8) בבדיקת השערות מסוימת התקבל:  $p\text{ value} = 0.0254$  לכן (בחרו בתשובה הנכונה):
- א. ברמת מובהקות של 0.01 אך לא של 0.05 נדחה את  $H_0$ .
  - ב. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 לא נדחה את  $H_0$ .
  - ג. ברמת מובהקות של 0.05 אך לא של 0.01 נדחה את  $H_0$ .
  - ד. ברמת מובהקות של 0.01 ושל 0.05 נדחה את  $H_0$ .

## תשובות סופיות:

- (1) 0.0228.
- (2) עבור כל רמת מובהקות סבירה.
- (3) א.  $H_0: \mu = 100$   
 $H_1: \mu < 100$   
 ב. 0.1056 ג. 0.1056.
- ד. נכריע שיש עמידה בהתחייבות של החברה.
- (4) א. 0.0006 ב. יקטן. ג. נכריע שאין כיוול.
- (5) נכון.
- (6) א'.
- (7) א'.
- (8) ג'.

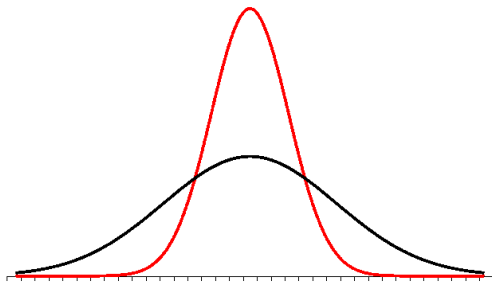
## בדיקת השערות על תוחלת (ממוצע) כששונות האוכלוסייה לא ידועה:

רקע:

השערת האפס: השערה אלטרנטיבה:	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$
תנאים:	1. $\sigma$ אינה ידועה 2. $X \sim N$ או מדגם מספיק גדול		
כלל ההכרעה: אזור הדחייה של $H_0$ :	$t_{\bar{x}} > t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\alpha}^{(n-1)}$  $-t_{1-\alpha, n-1}$ - דוחים את $H_0$	$t_{\bar{x}} < -t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ או $t_{\bar{x}} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$  $-t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ - דוחים את $H_0$
חלופה לכלל ההכרעה: נדחה $H_0$ אם מתקיים:	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\alpha}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\bar{X} > \mu_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ או $\bar{X} < \mu_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

$$. t_{\bar{x}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} : \text{סטטיסטי המבחן}$$

$$. S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}$$



### התפלגות T:

הינה התפלגות סימטרית פעמונית שהתוחלת שלה היא 0. ההתפלגות דומה להתפלגות Z רק שהיא יותר רחבה ולכן הערכים שלה יהיו יותר גבוהים. התפלגות T תלויה במושג שנקרא דרגות חופש.

דרגות החופש הן:  $df = n - 1$ .

ככל שדרגות החופש עולות ההתפלגות הופכת להיות יותר גבוהה וצרה. כשדרגות החופש שואפות לאינסוף התפלגות T שואפת להיות כמו התפלגות Z.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

מפעל קיבל הזמנה לייצור משטחים בעובי של 0.1 ס"מ. כדי לבדוק האם המפעל עומד בדרישה נדגמו 10 משטחים ונמצא שהעובי הממוצע הוא 0.104 עם אומדן לסטיית תקן 0.002 ס"מ.

א. מהן השערות המחקר?

ב. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

ג. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

## שאלות:

(1) משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון?

(2) משרד הבריאות פרסם שמשקל ממוצע של תינוקות ביום היוולדם בישראל 3300 גר'. משרד הבריאות רוצה לחקור את הטענה שנשים מעשנות בזמן ההיריון יולדות תינוקות במשקל נמוך מהממוצע. במחקר השתתפו 20 נשים מעשנות בהריון. להלן תוצאות המדגם שבדק את המשקל של התינוקות בעת הלידה:

$$n = 20$$

$$\bar{x} = 3120$$

$$S = 280$$

מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5% מה יש להניח לצורך פתרון?

(3) ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמלית. בארה"ב ממוצע הציונים הוא 100. במדגם שנעשה על 23 נבחנים ישראלים, התקבל ממוצע ציונים 104.5 וסטיית התקן המדגמית 16. האם בישראל ממוצע הציונים שונה מארה"ב? הסיקו ברמת מובהקות של 5%.

(4) באוכלוסייה מסוימת נדגמו 10 תצפיות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 750$$

$$\sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2 = 900$$

נתון שההתפלגות היא נורמלית.

בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התוחלת של ההתפלגות שונה מ-80.



- (5) ליאור ורוני העלו את אותן השערות על ממוצע האוכלוסייה. כמו כן הם התבססו על אותן תוצאות של מדגם. ליאור השתמש בטבלה של התפלגות  $Z$ . רוני השתמשה בטבלה של התפלגות  $t$ . מה נוכל לומר בנוגע להחלטת המחקר שלהם? בחר בתשובה הנכונה.
- אם ליאור ידחה את השערת האפס אז גם בהכרח רוני.
  - אם רוני תדחה את השערת האפס אז גם בהכרח ליאור.
  - שני החוקרים בהכרח יגיעו לאותה מסקנה.
  - לא ניתן לדעת על היחס בין דחיית השערת האפס של שני החוקרים.

- (6) נתון ש:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  כמו כן נתונות ההשערות הבאות:  $H_0: \mu = \mu_0$  .  $H_1: \mu < \mu_0$  . חוקר בדק את ההשערות הללו על סמך מדגם שכלל 10 תצפיות.  $\sigma^2$  לא הייתה ידועה לחוקר. החוקר החליט לדחות את השערת האפס ברמת מובהקות של 5% לאחר מכן כדי לחזק את קביעתו הוא דגם עוד 5 תצפיות ושקלל את תוצאות אלה גם למדגם כך שכלל עכשיו 15 תצפיות. בחר בתשובה הנכונה:
- א. כעת בברור הוא ידחה את השערת האפס.
  - ב. כעת הוא דווקא יקבל את השערת האפס.
  - ג. כעת לא ניתן לדעת מה תהיה מסקנתו.

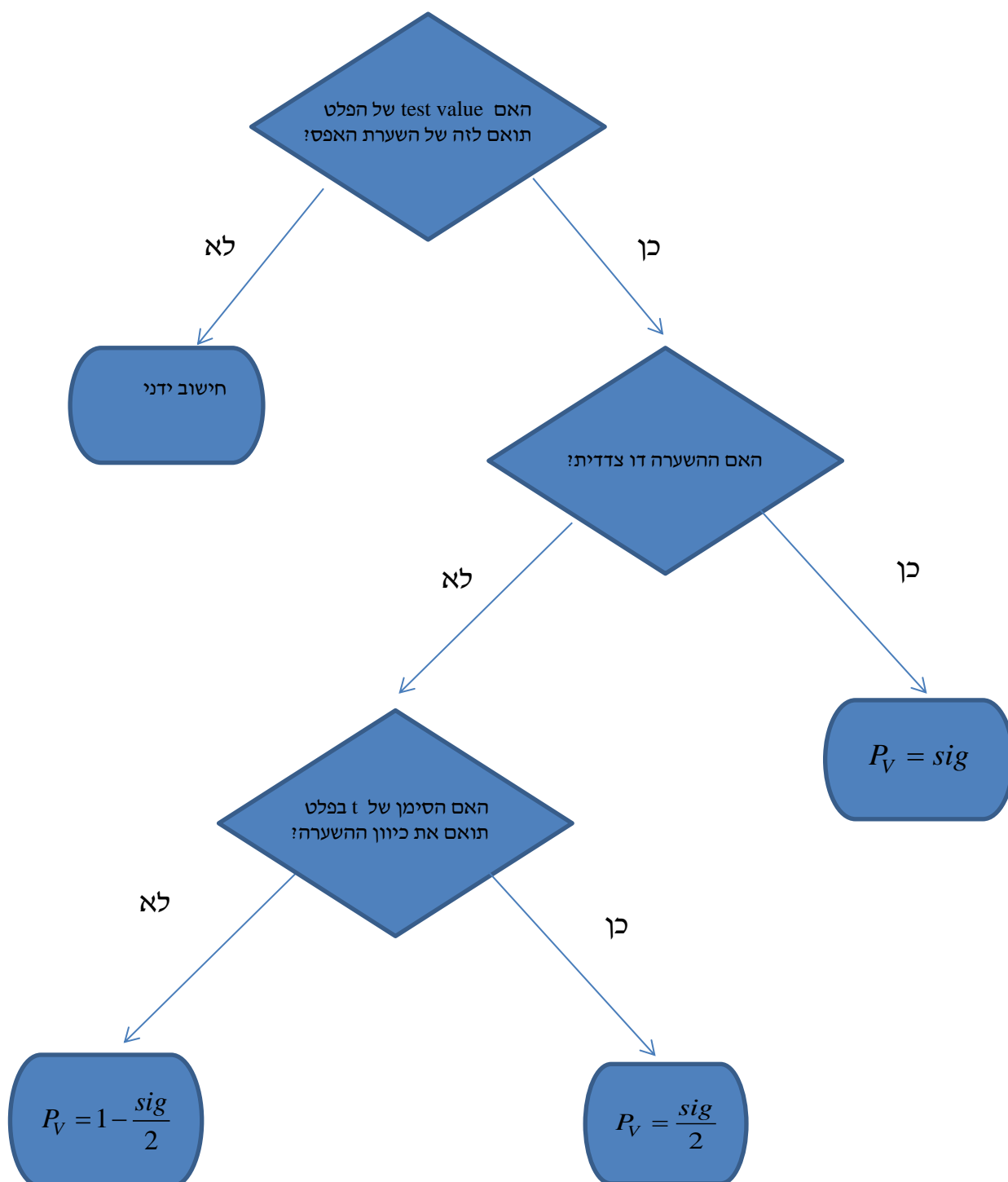
### תשובות סופיות:

- (1) נדחה  $H_0$ .
- (2) נדחה  $H_0$ .
- (3) נקבל  $H_0$ .
- (4) נקבל  $H_0$ .
- (5) ב'.
- (6) ג'.

## ניתוח פלטים:

רקע:

חישוב מובהקות התוצאה באמצעות פלט תוכנת SPSS:



## דוגמה (פתרון בהקלטה):

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
X	25	87.6400	64.90434	12.98087

One-Sample Test

Test Value = 60						
				Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)		Lower	Upper
X	2.129	24	.044	27.64000	.8488	54.4312

ממוצע הציונים במבחן המיצב בחשבון הוא 60. הוחלט לדגום כיתה אקראית של 25 תלמידים וללמד אותם בשיטת לימוד חדשה.

- א. מהו רווח הסמך לממוצע הציונים בחשבון אם יוחלט ליישם את שיטת הלימוד החדשה?
- ב. מהו  $P_V$  לבדיקת יעילותה של שיטת הלימוד החדשה?
- ג. מה יוכרע ברמת מובהקות של 5% לגבי יעילותה של שיטת הלימוד החדשה?

## שאלות:

- (1) באוניברסיטה גדולה גיל הסטודנטים לתואר ראשון מתפלג נורמאלי. בעבר פורסם שהגיל הממוצע של הסטודנטים הינו 23. להלן פלט תוכנת SPSS על מדגם של 16 סטודנטים אקראיים מתואר ראשון:

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
age	16	23.4375	2.50250	.62562

One-Sample Test

	Test Value = 23					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
age	.699	15	.495	.43750	-.8960	1.7710

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?  
 ב. מה ערכו של הפרמטר לפי השערת האפס?  
 ג. רשום רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת גיל הסטודנטים באוניברסיטה לתואר ראשון.  
 ד. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם הגיל הממוצע כיום שונה מבעבר?

- (2) קבוצת ילדים בגיל 6 קיבלה משימה לביצוע. עבור כל ילד בדקו כמה זמן לקח לו לסיים את המשימה בדקות. להלן תוצאות הניתוח הסטטיסטי:

One-Sample Test

	Test Value = 4.5					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
time	-1.853	24	.076	-.09200	-.1944	.0104

- א. כמה ילדים השתתפו במחקר?  
 ב. מצא רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת זמן ביצוע המשימה עבור ילדים בני 6.  
 ג. מה יש להניח כדי שרווח הסמך מסעיף א' יהיה תקף?  
 ד. בדוק ברמת מובהקות של 5% שזמן ביצוע המשימה הממוצע נמוך מ-4.5 דקות.

3) להלן פלט מחשב עבור ניתוח סטטיסטי שנעשה בתוכנת SPSS. הניתוח הוא עבור מדגם אקראי של קבוצת נבחנים בבגרות באנגלית.

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
grade	???	???	19.62787	2.95901

One-Sample Test

	Test Value = 75					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
grade	???	43	.017	-7.34091	-13.3083	???

- א. השלימו את הגדלים החסרים המסומנים בסמני שאלה בפלט.  
 ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים שונה מ-75?  
 ג. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים קטנה מ-75?  
 ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת ההשערה שהתוחלת של הציונים גדולה מ-75?

4) יצרן סיגריות מפרסם כי תוחלת הניקוטין בסיגריות שהוא מיצר קטנה מ-27 מ"ג. בבדיקה מקרית של 5 סיגריות מתוצרתו נמצאו כמויות הניקוטין הבאות: 21, 21, 20, 24, 22 מ"ג. הניחו כי כמות הניקוטין בסיגריות מפולג נורמאלי.

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
nicotine	5	21.6000	1.51658	.67823

One-Sample Test

	Test Value = 27					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
nicotine	-7.962	4	.001	-5.40000	-7.2831	-3.5169

- א. האם ברמת מובהקות של 5% ניתן להסיק שיש אמת בפרסום?  
 ב. אם היינו מוסיפים עוד תצפית שערכה 20. כיצד הדבר היה משפיע על הערך Sig ועל המסקנה?  
 ג. בדקו האם ניתן להגיד שתוחלת רמת הניקוטין שונה מ-26 ברמת מובהקות של 5%.

### תשובות סופיות:

- (1) א. הסקה של תוחלת אחת. ב. 23. ג.  $(22.104, 24.771)$ . ד. נקבל  $H_0$ .
- (2) א. 25. ב.  $(4.3056, 4.5104)$ . ג. המשתנה מתפלג נורמלית. ד. נדחה  $H_0$ .
- (3) א.  $n = 44, \bar{X} = 67.66, t = -2.48, upper = -1.3735$ . ב. 0.017. ג. 0.0085. ד. 0.9915.
- (4) א. נכריע שיש אמת בפרסום. ב. המסקנה לא תשתנה. ג. נכריע שהתוחלת שונה מ-26.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 19 - בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

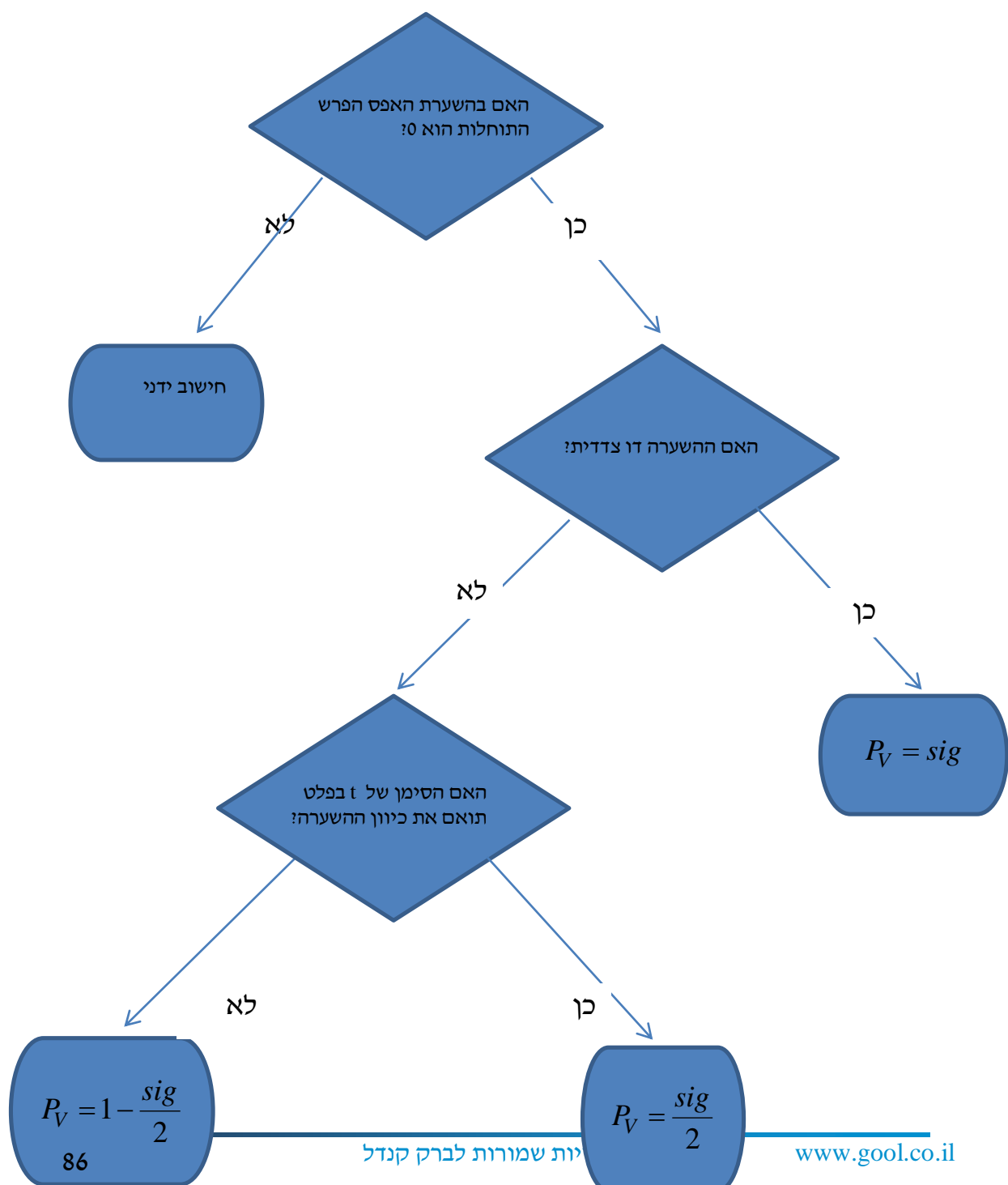
תוכן העניינים

1. ניתוח פלטים.....86

## בדיקת השערות על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

### ניתוח פלטים – רקע

מובהקות התוצאה על סמך הפלט:





### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

בסקר שנערך בארה"ב בשנת 1993 נשאלו נסקרים משני אזורים שונים במדינה על מס' האחים והאחיות שלהם. להלן הפלט שהתקבל :

Group Statistics

	Region of the United States	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Number of Brothers and Sisters	North East	676	3.76	2.939	.113
	South East	410	4.05	2.993	.148

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
Number of Brothers and Sisters	Equal variances assumed	.173	.677	-1.583	1084	.114	-.293	.185	-.657	.070
	Equal variances not assumed			-1.576	850.945	.115	-.293	.186	-.658	.072

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?
- ב. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם קיים שוויון שונויות בין שני האזורים?
- ג. בדוק האם קיים הבדל בין-"South East" ל-"North East" ברמת מובהקות של 5% מבחינת מספר האחים והאחיות הממוצע.
- ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שההפרש הממוצע בין-"South East" לבין-"North East" חיובי?

## שאלות

- 1) להלן פלט מתוכנת SPSS מתוך מחקר שבחן את רמת האופטימיות של גברים ונשים. רמת האופטימיות נמדדה בסולם ציונים של 1 עד 5.

Group Statistics

	GENDER	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
optimizm	MALE	633	2.6053	.49781	.01979
	FEMALE	568	2.5503	.48483	.02034

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
optimizm	Equal variances assumed	.383	.536	1.935	1199	.053	.05500	.02842	-.00076	?
	Equal variances not assumed			1.938	1190.977	.053	.05500	.02838	-.00068	.11067

- א. האם ניתן להניח ששוונות האופטימיות של נשים וגברים שווה ברמת מובהקות של 5%?
- ב. ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין הנשים לגברים ברמת האופטימיות הממוצעת שלהם?
- ג. מצא את הגבול העליון של רווח הסמך המסומן בסימן שאלה בפלט. דייק עד 5 ספרות אחרי הנקודה.
- ד. בנה רווח סמך לתוחלת רמת האופטימיות של הגברים ברמת סמך של 95%.

(2) פסיכולוגים טוענים שאנשים שניגשים למבחן אינטליגנציה יותר מפעם אחת נוטים לקבל ציונים גבוהים יותר. להלן הפלט שהתקבל:

### Group Statistics

		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
grade	A	9	96.8889	9.40006	3.13335
	B	11	108.4545	11.46616	3.45718

Independent Samples Test										
Levene's Test for Equality of Variances				t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
grade	Equal variances assumed	.206	.656	-2.428	18	.026	-11.56566	4.76333	-21.57304	-1.55828
	Equal variances not assumed			-2.479	17.997	.023	-11.56566	4.66583	-21.36832	-1.76299

T-Test

מקרא:

A = נגשו פעם אחת.

B = נגשו יותר מפעם אחת.

א. רשמו את השערות המחקר והסבירו מהו המבחן המתאים כאן.

ב. כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם היה מדובר על אותם אנשים שציונם נבדק פעם אחרי המבחן הראשון שעשו ופעם אחרי המבחן השני?

ג. האם ניתן לומר כי מידת הפיזור של ציוני אנשים הנבחנים בפעם הראשונה שונה ממידת הפיזור של ציוני האנשים אשר נבחנים בפעם השנייה. בדוק

ברמת מובהקות של  $\alpha = 0.05$ .

ד. האם נכונה טענת הפסיכולוגים ברמת מובהקות של  $\alpha = 0.01$ .

3) כחלק ממחקר בנושא הנישואין בישראל, אחד החוקרים העלה השערה שיש הבדל בממוצע גיל הנישואין (הראשונים), בין נשים הגרות בערים מרכזיות לבין נשים הגרות בערים מרוחקות מהמרכז. לשם כך נדגמו 50 כלות מכל אחת משתי ערים עיר א'-מרכזית ועיר ב'-מרוחקת ונרשם גילן. תוצאות עיבוד הנתונים מופיעות בטבלאות שלהלן:

## T-Test

Group Statistics

מקום המגורים	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
גיל הנישואין עיר א	50	24.8072	1.38978	.19654
עיר ב	50	23.0131	1.62070	.22920

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
גיל הנישואין	Equal variances assumed	.330	.567	5.942	98	.000	1.79415	.30193	1.19497	2.39332
	Equal variances not assumed			5.942	95.772	.000	1.79415	.30193	1.19480	2.39350

- א. מהו המבחן הסטטיסטי שנעשה כאן?
- ב. מצא רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש בין עיר א לעיר ב מבחינת גיל הנשים הממוצע בנישואין הראשונים.
- ג. האם ניתן לומר ברמת מובהקות של 1% שנשים בערים מרכזיות מתחתנות בגיל מאוחר יותר מאשר נשים הגרות בערים מרוחקות?

## (4) להלן פלט של תוכנת SPSS :

## T-Test

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
X	26	36.3077	13.23259	2.59513
Y	24	46.4583	20.96369	4.27920

## Independent Samples Test

	Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
	F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
								Lower	Upper
Equal variances assumed	4.446	.040	-2.164	???	.044	-10.15064	???	-20.03781	-.26347
Equal variances not assumed			-2.038	38.267	.048	???	5.00462	-20.27964	-.02164

א. השלימו את סימני השאלה בטבלה.

ב. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שקיים הבדל בין השונות של  $X$  לזה של  $Y$ ?

ג. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהתוחלת של  $X$  גדולה מהתוחלת של  $Y$ ?

ד. מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה שהתוחלת של  $X$  קטנה מהתוחלת של  $Y$ ?

## תשובות סופיות

- (1) א. נקבל את  $H_0$  ונכריע שיש שוויון שוניות.  
 ב. נקבע שלא קיים הבדל בין נשים לגברים מבחינת האופטימיות הממוצעת.  
 ג. 0.11076  
 ד.  $2.5665 \leq \mu \leq 2.6441$
- (2) א. מבחן T להפרש ממוצעים במדגמים בלתי תלויים.  
 ב. מבחן T למדגמים מזווגים.  
 ג. נקבל את  $H_0$ , נקבע לקיום שוויון שוניות.  
 ד. נקבל את  $H_0$ , לא נקבל את טענת הפסיכולוגים.
- (3) א. מבחן T להשוואת תוחלת במדגמים בלתי תלויים.  
 ב.  $1.19497 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 2.39332$  ג. כן.
- (4) א. 10.15, 4.69, -48  
 ב. 0.04  
 ג. 0.978  
 ד. 0.022

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

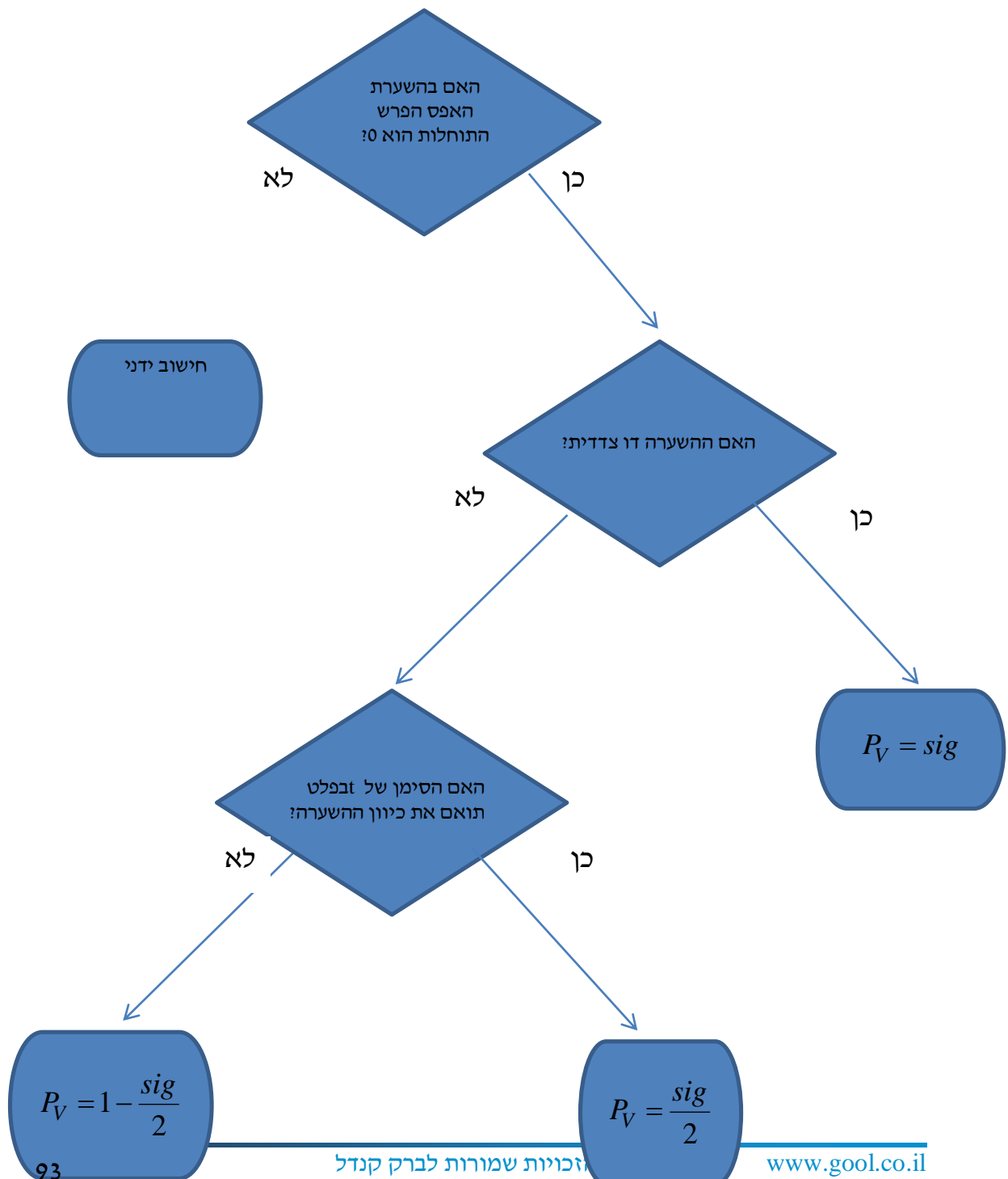
פרק 20 - בדיקת השערות לתוחלת ההפרש במדגמים מזווגים

תוכן העניינים

1. ניתוח פלטים.....93

## בדיקת השערות על תוחלת ההפרשים במדגמים מזווגים (תלויים)

מדגמים מזווגים – ניתוח פלטים – רקע





**דוגמה (פתרון בהקלטה) :**

כדי לבדוק את ההשפעה של קורס לגמילה מעישון נלקח מדגם מקרי של 5 נבדקים. עבור כל אחד מהם נמדדה צריכת הסיגריות היומית לפני הקורס וחודשיים אחריו. הניחו שצריכת הסיגריות מתפלגת נורמלית. להלן התוצאות :

5	4	3	2	1	נבדק
30	28	25	22	40	לפני
12	10	13	24	30	אחרי

**Paired Samples Statistics**

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	BEFORE	29.0000	5	6.85565	3.06594
	AFTER	17.8000	5	8.72926	3.90384

**Paired Samples Test**

		Paired Differences				t	df	Sig. (2-tailed)	
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	90% Confidence Interval of the Difference				
					Lower				Upper
Pair 1	BEFORE - AFTER	11.20000	8.19756	3.66606	3.38452	19.01548	3.055	4	.038

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם הקורס יעיל.

## שאלות

- 1) בסקר שנערך בארה"ב בשנת 1993 נשאלו נסקרים על השכלת הוריהם, להלן הפלט שהתקבל:

Paired Samples Test									
		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower	Upper			
Pair 1	Highest Year School Completed, Father - Highest Year School Completed, Mother	-.007	3.115	.100	-.203	.189	-.072	973	.943

- א. תנו אומדן להפרש הממוצעים.  
 ב. תנו אומדן לטעות התקן של הפרש הממוצעים.  
 ג. האם קיים הבדל מובהק בין השכלת האבות להשכלת האימהות ברמת מובהקות של 5%?

- 2) בתחרות קפיצה למים שופטים באופן קבוע שופט איטלקי ושופט דרום קוריאני. להלן פלט המנתח את הציונים ששופטים אלה נתנו בתחרויות השונות:

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Italy	???	300	.86742	.05008
	South Korea	8.9183	???	.81992	.04734

Paired Samples Test

		Paired Differences				t	df	Sig. (2-tailed)	
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower				Upper
Pair 1	Italy - South Korea	-.42233	.36153	.02087	-.46341	-.38126	-20.234	???	???

- א. השלימו את החלקים החסרים בפלט (מסומנים בסימני שאלה).  
 ב. בדקו את הטענה שהשופט הדרום קוריאני נותן בממוצע 0.2 נקודות יותר מאשר השופט האיטלקי ברמת מובהקות של 5%.  
 ג. מהו רווח הסמך ברמת סמך של 95% לתוחלת פער הציונים בין השופטים?  
 ד. בנו את הרווח כעת ברמת סמך של 98% לתוחלת פער בציונים בין השופטים.

3) בדקו את ציוניהם של 44 נבדקים אקראיים במבחן הפסיכומטרי. פעם אחת לפני הכנה (Before) ופעם אחת אחרי הכנה (After).

Paired Samples Test									
		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Difference				
					Lower	Upper			
Pair 1	Before - After	-7.45455	19.28303	2.90703	-13.31712	-1.59197	-2.564	43	.014

- א. רשמו מהו המבחן הסטטיסטי ונסח את ההשערות אליהם מתייחס הפלט.
- ב. בדקו את ההשערה שממוצע ציונים משתפרים לאחר ההכנה ברמת מובהקות של 5%.
- ג. בדקו את ההשערה שממוצע ציונים משתפרים לאחר ההכנה ביותר מ-5 נקודות ברמת מובהקות של 5%.
- ד. מצאו רווח סמך לתוחלת שיפור ממוצע הציונים לאחר ההכנה ברמת ביטחון של 95%.

## (4) להלן פלט של תכנת SPSS :

## T-Test

## Paired Samples Statistics

	Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1 x	54.0000	6	5.86515	2.39444
y	46.5000	6	10.72847	4.37988

## Paired Samples Test

	Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
				Lower	Upper			
Pair 1 x - y	7.50000	??	4.72405	-4.64356	19.64356	??	5	.173

- מלא את החלקים החסרים בטבלה.
- מהי רמת המובהקות המינימלית לקבלת הטענה שיש הבדל בין  $X$  ל- $Y$  בממוצע?
- האם התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה, ואם כן גדלה או קטנה, אם הינו מוסיפים עוד תצפית שההפרש בין  $X$  ל- $Y$  הוא 0.
- מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה ש  $X$  גדול מ- $Y$  בממוצע?
- מהי מובהקות התוצאה לבדיקת הטענה ש  $X$  קטן מ- $Y$  בממוצע?
- בנו רווח סמך לתוחלת של  $X$  ברמת סמך של 90%.

### תשובות סופיות

- (1) א. -0.007      ב. 0.1      ג. אין הבדל מובהק.
- (2) א.  $d.f = 299$  ,       $n = 300$  ,       $\bar{X} = 8.496$  ,  $\text{Sig} = 0$  .
- ב. נדחה את  $H_0$  .      ג. (0.46341, 0.38126)      ד. (0.4708, 0.3738) .
- (3) א. ראה וידאו.      ב. נדחה את  $H_0$  .      ג. לא נדחה את  $H_0$  .
- ד. (1.592, 13.317) .
- (4) א. 1.5876 , 11.5715      ב. 0.173      ג. יגדל.
- ד. 0.0865      ה. 0.9135      ו.  $49.18 < \mu < 58.82$  .

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 21 - ניתוח שונות חד כיוונית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 99

## ניתוח שונות חד כיוונית

### רקע תיאורטי

ניתוח שונות (חד כיוונית) הוא מבחן להשוואת תוחלות  $(\mu_1, \dots, \mu_k)$  של  $k$  אוכלוסיות שונות. לכן, בניתוח שונות, השערות המחקר הן:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \quad (\text{התוחלות של כל האוכלוסיות שוות})$$

$$H_1: \quad \text{אחרת} \quad (\text{לפחות שתיים מהתוחלות שונות})$$

### ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

(2) בכל אוכלוסייה מתוך  $k$  האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.

(3) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות  $\sigma^2$ .

(4) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם  $k$  רמות (levels). כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה: נסמן ב- $n_i$  את גודל המדגם בקבוצה  $i$ .

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad \text{- מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).}$$

$$\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k \quad \text{- ממוצע המדגם הראשון, ..., ממוצע המדגם ה-} k \text{-י.}$$

$$\bar{X} \quad \text{- ממוצע כללי (של כל המדגמים).}$$

$$SS_B = \sum_{i=1}^k n_i [\bar{X}_i - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים בין הקבוצות:}$$

$$SS_W = \sum_{i=1}^k n_i [n_i - 1] \cdot \hat{S}_i^2 \quad \text{סכום ריבועים בתוך הקבוצות:}$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_j} [X_{ij} - \bar{X}]^2 \quad \text{סכום ריבועים כללי:}$$

$$SST = SSB + SSW$$

יש למלא את טבלת ניתוח השונות הבאה:

מקור השונות	סכום הריבועים SS	דרגות חופש $df$	ממוצע הריבועים MS	F
B - בין הקבוצות	SSB	$k-1$	$\frac{SSB}{k-1}$	$\frac{MSB}{MSW}$
W - בתוך הקבוצות	SSW	$n-k$	$\frac{SSW}{n-k}$	
T - סה"כ	SST	$n-1$		

$$F = \frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}} \sim F(k-1, n-k)$$

אזור דחיית  $H_0 : 1-\alpha : F_{(k-1, n-k)}$



## שאלות

- (1) מחקר מעוניין להשוות בין שלוש תרופות לשיכוך כאבים במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין התרופות מבחינת הזמן בדקות שלוקח עד שהתרופה משפיעה. לצורך הבדיקה נלקחו 15 אנשים שסובלים מכאבי ראש. אנשים אלה חולקו באקראי לשלוש קבוצה: קבוצה 1 קיבלה "אקמול" קבוצה 2 קיבלה "אופטלגין" קבוצה 3 קיבלה "נורופן". כל אדם במחקר מסר את מספר הדקות עד שהתרופה השפיעה עליו.
- א. מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?  
מהו ה"גורם" וכמה רמות יש לו?
- ב. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים כאן? רשמו את ההשערות.
- ג. מה הן ההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן הסטטיסטי שהצעת בסעיף הקודם?

- (2) בעיר מסוימת שלושה בתי ספר תיכון. ראש העיר התעניין לבדוק האם קיים הבדל בהצלחה של בתי הספר במקצוע מתמטיקה. לצורך כך הוא דגם מספר תלמידים שנבחנו במבחן הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות בעירו ובדק עבור כל תלמיד מה ציון הבגרות שלו במתמטיקה. להלן הציונים שהתקבלו:

"הס"	"רבין"	"המתמיד"
85	98	78
83	62	65
74	55	70
85	80	90
75		56

- א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?  
רשמו את ההשערות ואת ההנחות של המבחן.
- ב. מהו גודל המדגם? מהו המשתנה הבלתי תלוי (factor) כמה רמות יש לו?
- ג. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של הציונים בכל אחד מהמדגמים.
- ד. מלאו את טבלת ANOVA.
- ה. רשמו את כלל ההכרעה למבחן שהוצע בסעיף א ברמת מובהקות של 5%.
- ו. האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינת רמת הצלחת התלמידים במקצוע המתמטיקה? ענה על סמך הסעיפים הקודמים.

- (3) מעוניינים לבדוק האם יש הבדל בהשפעה של שיטות טפול שונות על לחץ הדם הסיסטולי (SBP) באוכלוסייה של קשישים. נבדקו 4 שיטות שונות. בטבלה המצורפת מרוכזים ממצאי המחקר.

השיטה	A	B	C	D
גודל המדגם	12	14	8	12
הממוצע	178	172	180	182
סטיית התקן	4	8	5	3

- א. רשמו את השערות המחקר וההנחות הדרושות כדי לבצע את המבחן המתאים.
- ב. מה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?
- ג. האם יש צורך לבצע השוואות מרובות?

(4) שלושה אופים נתבקשו להכין עוגת שוקולד. לכל אופה בדקו את משך זמן ההכנה בדקות. כל אופה נדרש לאפות בכל יום 4 עוגות.

האם קיים הבדל בין האופים מבחינת תוחלת זמני ההכנה של העוגות?

בדקו ברמת מובהקות של 5%.

האופה	ניר	מוזס	שלום
סכום הזמנים	206	212	182
סכום ריבועי הזמנים	10644	11250	8982

(5) להלן טבלת ניתוח שונות חד כיוונית. במחקר בחנו 4 סוגי סוללות. רצו לבדוק האם לסוג הסוללה השפעה על תוחלת אורך החיים שלה. הפעילו את כל הסוללות על אותו מכשיר ובדקו את אורך החיים של כל סוללה בשעות. מה המסקנה ברמת מובהקות של 10%? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות.

### ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	10.317	3	3.439	1.361	.279
Within Groups	60.648	24	2.527		
Total	70.964	27			

(6) להלן טבלת ANOVA בטבלה הושמטו חלקים. השלימו את החלקים בטבלה שהושמטו ומסומנים באותיות.

### ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	ב	ג	ה	.000
Within Groups	א	17	ד		
Total	522.950	19			

7) חברת תרופות לקחה 15 אנשים ברמת בריאות דומה. החברה חילקה את האנשים ל שלוש קבוצות שוות בגודלן. לכל קבוצה ניתנה אותה תרופה במינון שונה (dosage). המינונים שניתנו הם: 10 מ"ג, 20 מ"ג ו-30 מ"ג. לאחר שעה מזמן לקיחת התרופה נבדק קצב פעימות הלב של כל אדם (pulse). הנתונים הוזנו לתוכנה סטטיסטית והתקבלו התוצאות הבאות:

## ANOVA

pulse

ANOVA						Tukey HSD <sup>a</sup>			
pulse						pulse			
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	dosage	N	Subset for alpha = 0.05	
								1	2
Between Groups	414.400	2	207.200	19.733	.000	30.00	5	71.0000	
Within Groups	126.000	12	10.500			20.00	5		80.2000
Total	540.400	14				10.00	5		83.4000
						Sig.		1.000	.299

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

## Post Hoc Tests

## Multiple Comparisons

 pulse  
 Tukey HSD

(I) dosage	(J) dosage	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
10.00	20.00	3.20000	2.04939	.299	-2.2675	8.6675
	30.00	12.40000 <sup>*</sup>	2.04939	.000	6.9325	17.8675
20.00	10.00	-3.20000	2.04939	.299	-8.6675	2.2675
	30.00	9.20000 <sup>*</sup>	2.04939	.002	3.7325	14.6675
30.00	10.00	-12.40000 <sup>*</sup>	2.04939	.000	-17.8675	-6.9325
	20.00	-9.20000 <sup>*</sup>	2.04939	.002	-14.6675	-3.7325

\*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין המינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק של האנשים? רשמו את ההשערות וההנחות הדרושות לצורך פתרון.
- הסבירו ללא חישוב כיצד הייתה משתנה התשובה לסעיף הקודם אם הינו מעלים את הדופק של כל התצפיות במחקר ב-2.
- האם יש צורך במחקר בהשוואת מרובות. נמקו!
- לטבלת ANOVA צורפו טבלאות של השוואות מרובות בשיטה הנקראת "טוקי". ברמת בטחון של 95% מה הם הממצאים לפי שיטה זו?

- (8) בעיר מסוימת רצו לבדוק האם קיים הבדל ברמה של התלמידים בין בתי הספר השונים בעיר. ביצעו מדגם מכל בית ספר ונתנו מבחן זהה לכל הנדגמים. לאחר מכן ריכזו את הנתונים בתוכנה סטטיסטית והפעילו ניתוח שונות. מצורפים הפלטים שהתקבלו. ענו על הסעיפים הבאים :
- כמה בתי ספר יש בעיר?
  - כמה תלמידים השתתפו בסך הכול במחקר?
  - האם קיים הבדל בין בתי הספר בעיר מבחינה רמת הציונים? בדקו ברמת מובהקות של 1%
  - בביטחון של 95% אילו בתי ספר שונים זה מזה ברמת התלמידים? נמקו והסבירו.

#### Oneway

##### ANOVA

grade

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	7799.600	4	1949.900	13.586	.000
Within Groups	2870.400	20	143.520		
Total	10670.000	24			

## Post Hoc Tests

## Multiple Comparisons

grade

Scheffe

(I) school	(J) school	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1.00	2.00	5.40000	7.57681	.971	-20.2543	31.0543
	3.00	36.80000*	7.57681	.003	11.1457	62.4543
	4.00	36.40000*	7.57681	.003	10.7457	62.0543
	5.00	-2.60000	7.57681	.998	-28.2543	23.0543
2.00	1.00	-5.40000	7.57681	.971	-31.0543	20.2543
	3.00	31.40000*	7.57681	.011	5.7457	57.0543
	4.00	31.00000*	7.57681	.013	5.3457	56.6543
	5.00	-8.00000	7.57681	.888	-33.6543	17.6543
3.00	1.00	-36.80000*	7.57681	.003	-62.4543	-11.1457
	2.00	-31.40000*	7.57681	.011	-57.0543	-5.7457
	4.00	-.40000	7.57681	1.000	-26.0543	25.2543
	5.00	-39.40000*	7.57681	.001	-65.0543	-13.7457
4.00	1.00	-36.40000*	7.57681	.003	-62.0543	-10.7457
	2.00	-31.00000*	7.57681	.013	-56.6543	-5.3457
	3.00	.40000	7.57681	1.000	-25.2543	26.0543
	5.00	-39.00000*	7.57681	.001	-64.6543	-13.3457
5.00	1.00	2.60000	7.57681	.998	-23.0543	28.2543
	2.00	8.00000	7.57681	.888	-17.6543	33.6543
	3.00	39.40000*	7.57681	.001	13.7457	65.0543
	4.00	39.00000*	7.57681	.001	13.3457	64.6543

\*. The mean difference is significant at the 0.05 level.

## Homogeneous Subsets

grade

Scheffe<sup>a</sup>

school	N	Subset for alpha = 0.05	
		1	2
3.00	5	45.0000	
4.00	5	45.4000	
2.00	5		76.4000
1.00	5		81.8000
5.00	5		84.4000
Sig.		1.000	.888

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 5.000.

## תשובות סופיות

(1) א. משתנה בלתי תלוי : סוג התרופה. ב. ניתוח שונות חד כיוונית

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

משתנה תלוי : הזמן עד להשפעת התרופה בדקות.

ג. 1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

(2) א. המבחן לניתוח שונות חד כיוונית.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונויות.

ב. גודל המדגם : 14. משתנה ב"ת : בית הספר, בעל 3 רמות.

$$\bar{X} = 80.4, \hat{S} = 5.46, \bar{X} = 73.75, \hat{S} = 19.29, \bar{X} = 71.8, \hat{S} = 12.93$$

ד. להלן טבלה :

מקור השונות	SS	df	MS	F
B	200.6	2	100.3	
W	1904.75	11	173.2	
סה"כ	2105.35	13		0.58

$$F > 3.98$$

ו. נקבל את  $H_0$ .

(3) א.  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$   
 $H_1 : otherwise$   
 ב. נדחה את  $H_0$ .  
 ג. כן.

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונויות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

(4) נקבל את  $H_0$  : נכריע שאין הבדל מובהק בין האופים מבחינת תוחלת זמן הכנה.

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 \quad (5)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. שוויון שונות.

3. משתנים מתפלגים נורמלית.

נקבל את  $H_0$  : לסוג סוללה אין השפעה של תוחלת החיים ברמת ביטחון של 10%.

(6) להלן טבלה :

### ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	357.450	2 ב	178.725 ג	18.36 ה	.000
Within Groups	165.5 א	17	9.735 ד		
Total	522.950	19			

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad (7)$$

$$H_1 : otherwise$$

הנחות :

1. מדגמים בלתי תלויים.

2. משתנים מתפלגים נורמלית.

3. שוויון שונות.

נדחה את  $H_0$  : ברמת ביטחון של 5% קיים הבדל במינונים השונים מבחינת תוחלת הדופק.

$$\mu_{20} = \mu_{10} > \mu_{30} \quad \text{ד.} \quad \text{ג. כן.} \quad \text{ב. ראה וידאו.} \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$25 \quad \text{ב.} \quad 5 \quad \text{א.} \quad (8)$$

ג. נדחה את  $H_0$  : יש לפחות שני בתי ספר בעיר עם תוחלת רמת ציונים שונה.

$$(\mu_3 = \mu_4) < (\mu_1 = \mu_2 = \mu_3) \quad \text{ד.}$$

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 22 - גודל האפקט

תוכן העניינים

1. גודל האפקט בהסקה על תוחלת שהשונות ידועה ..... (ללא ספר)
2. גודל האפקט בהסקה על תוחלת שהשונות לא ידועה ..... (ללא ספר)
3. גודל האפקט בהסקה על תוחלת ההפרש במדגמים מזווגים ..... (ללא ספר)
4. גודל האפקט בהסקה על הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים ובהנחת שוויון שונויות . (ללא ספר)
5. גודל האפקט במבחן לניתוח שונות ..... (ללא ספר)



# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 23 - ניתוח שונות דו כיווני

תוכן העניינים

108	1. הקדמה
118	2. אפקטים פשוטים, עיקריים ואינטראקציה
130	3. תהליך ניתוח שונות דו כיווני

## ניתוח שונות דו-כיוונית - הקדמה

### רקע

ראשית, נחזור על עיקרי ניתוח השונות החד-כיוונית (חד-גורמי).

בניתוח שונות חד-כיוונית יש משתנה תלוי יחיד, שהוא כמותי, ומשתנה בלתי תלוי יחיד, שהוא משתנה קטגוריאלי (משתנה שהערכים שלו שייכים למספר סופי של קטגוריות). המשתנה הקטגוריאלי נקרא לעתים גם גורם (פקטור), והקטגוריות שלו נקראות רמות. המטרה בניתוח שונות חד-כיוונית היא לבדוק האם לגורם יש השפעה מובהקת על המשתנה התלוי. השערת האפס של המחקר בניתוח שונות חד-כיוונית היא שבכל הקטגוריות יש אותה התוחלת, והשערת המחקר טוענת שיש לפחות שתי קטגוריות שבהן התוחלות שונות.

### דוגמה: (פתרון בהקלטה)

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 30 מטופלים בעלי משקל עודף, והם חולקו באקראי לשלוש קבוצות שוות בגודלן, כך שכל קבוצה קיבלה דיאטה נחקרת אחרת. כעבור שלושה חודשים בדקו את מספר הקילוגרמים שהפחית כל מטופל ממשקלו בתקופה זו. מטרת המחקר הייתה לבדוק האם קיים הבדל בין הדיאטות מבחינת ההפחתה במשקל.

- מהו המשתנה התלוי במחקר?
- מהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר? כמה רמות יש לו?
- מה הן השערות המחקר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?

בניתוח שונות דו-כיוונית אנו מוסיפים עוד משתנה בלתי תלוי למחקר, כלומר עוד גורם שאנו רוצים לבדוק איך הוא משפיע על המשתנה התלוי. לכן בניתוח שונות דו-כיוונית יש משתנה תלוי כמותי יחיד ושני משתנים בלתי תלויים שכל אחד מהם קטגוריאלי. כזכור, למשתנים הבלתי תלויים אנו קוראים גם גורמים (פקטורים), ומספר הקטגוריות של כל גורם נקרא גם מספר הרמות שלו. ניתוח שונות רב-כיוונית או רב-גורמי הוא ניתוח שונות שבו יש יותר מגורם אחד, כלומר יותר ממשתנה בלתי תלוי קטגוריאלי אחד. בניתוח שונות דו-כיוונית יש שני גורמים, בניתוח שונות תלת-גורמי יש שלושה גורמים וכו'. ככל שנוסיף גורמים, הניתוח הסטטיסטי יהיה מורכב יותר ויידרשו יותר תצפיות למחקר אבל כיוון שהוא יקטין את שונות הטעויות (שונות מקרית) וייתן יותר הסבר לשונות הכללית, כך שהמבחן יהיה עוצמתי יותר.

### המשך הדוגמה:

מבין 30 המטופלים שבמחקר 15 היו גברים ו-15 היו נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 5 גברים ו-5 נשים.

מה הם המשתנים הבלתי תלויים? כמה רמות יש לכל משתנה?

בניתוח שונות דו-כיוונית אנו בעצם רוצים לבדוק סימולטנית שלוש שאלות מחקר על אוכלוסיית כבדי המשקל:

- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה משימוש בדיאטות שונות?
- האם יש הבדלים משמעותיים בין שיעורי הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל כתוצאה ממגדר שונה?
- האם יש השפעה משולבת (אינטראקציה) של שני הגורמים הנבדקים על הפחתת המשקל של מטופלים כבדי משקל, כלומר האם צירוף של דיאטה מסוימת ומגדר מסוים מביא להפחתת משקל גדולה יותר או קטנה יותר מצירופים אחרים?

נסמן גורם אחד ב- $a$  ואת מספר הרמות שלו ב- $A$ . באותו האופן הגורם האחר יסומן ב- $b$ , ואת מספר הרמות שלו נסמן ב- $B$ . מספר הקבוצות הכולל שאנו יוצרים הוא  $A \cdot B$ .

### המשך הדוגמה:

- בחרו גורם אחד להיות  $a$  וגורם אחר להיות  $b$ . מהו  $A$  ומהו  $B$ ?
- כמה קבוצות שונות נוצרו במחקר?

נסמן ב- $m$  את מספר התצפיות בכל תא (בהנחה שהוא יהיה מספר קבוע). תא הוא שילוב של רמה מסוימת של גורם  $a$  עם רמה מסוימת של גורם  $b$ .

### המשך הדוגמה:

- כמה תאים (קבוצות) יש במחקר?
- מה ערכו של  $m$ ?
- מהו הקשר המתמטי בין  $m$  לבין  $n$ , גודל המדגם?

נסמן ב- $a_1$  את הרמה הראשונה של  $a$ , ב- $a_2$  את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.  
 נסמן ב- $b_1$  את הרמה הראשונה של  $b$ , ב- $b_2$  את הרמה השנייה שלו וכך הלאה.  
 נסמן ב- $\mu_i$  את התוחלת ברמה  $a_i$ . נסמן ב- $\mu_j$  את התוחלת ברמה  $b_j$ . נסמן ב- $\mu_{ij}$  את התוחלת של תא  $ij$ .

#### המשך הדוגמה:

- מה המשמעות של  $\mu_1$  ושל  $\mu_2$ ?
- מה המשמעות של  $\mu_{12}$  ושל  $\mu_{21}$ ?

#### השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני

את השערות המחקר בניתוח שונות דו-כיווני אפשר לרשום בצורות רבות:

לגורם  $a$  אין השפעה על המשתנה התלוי:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

לגורם  $b$  אין השפעה על המשתנה התלוי:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

אין אינטראקציה בין שני הגורמים:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

דרך אחרת היא שימוש בתוחלות:

$$H_0 : \mu_{1.} = \mu_{2.} = \dots = \mu_{A.}$$

$H_1$  : אחרת

$$H_0 : \mu_{.1} = \mu_{.2} = \dots = \mu_{.B}$$

$H_1$  : אחרת

$H_0$  : אין אינטראקציה בין שני הגורמים

$H_1$  : אחרת

המשך הדוגמה:

אם אנחנו מעוניינים לבצע ניתוח שונות דו-כיווני, מה הן ההשערות הנחקרות?

## שאלות

- (1) בחברת טקסטיל בחנו 4 סוגי בדים שונים מבחינת חוזקם. דגמו 5 חתיכות בד מכל סוג ובדקו את חוזק הקריעה של כל סוג בד.
  - א. מהו המשתנה התלוי במחקר?
  - ב. כמה משתנים בלתי תלויים יש במחקר? מה הם?
  - ג. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?
  
- (2) במחקר בתחום הפסיכולוגיה נדגמו אנשים הסובלים מחרדות מסוגים שונים. כל מטופל סווג כסובל מאחד מסוגי החרדות הבאים: חרדה חברתית, חרדה כללית או אגורפוביה. במחקר השתתפו 6 מטופלים מכל סוג חרדה שצוין. המטופלים במחקר חולקו כך שכל מטופל היה צריך לעבור במשך שנה את אחד מהטיפולים הבאים: טיפול קוגניטיבי התנהגותי (CBT), טיפול קבוצתי או טיפול דיאלקטי התנהגותי (DBT). בכל סוג טיפול השתתפו 2 מטופלים מכל סוג חרדה. בסוף השנה נבדקו כל המטופלים וקיבלו ציון כמותי על השיפור במצבם הנפשי (משתנה כמותי). מטרת המחקר הייתה לבדוק האם סוג החרדה, סוג הטיפול והשילוב ביניהם משפיעים על המצב הנפשי של המטופלים.
  - א. מהו גודל המדגם?
  - ב. מהו המשתנה התלוי במחקר הזה ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?
  - ג. כמה קטגוריות יש לכל משתנה בלתי תלוי?
  - ד. כמה קבוצות שונות יש במערך המחקרי?
  - ה. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים במערך מחקרי זה?

**(3)** מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

פלסטיק	זכוכית	סוג בקבוק / גובה המדף
		גובה המדף
59	23	נמוך
63	32	
88	47	בינוני
90	55	
51	40	גבוה
56	48	

- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים? נמקו.
- מהו מספר הרמות של כל גורם מחקרי?
- מה יהיו השערות המחקר אם יתבצע ניתוח שונות דו-כיוונית?
- מהו ערכו של  $m$  ומהו ערכו של  $n$ ?

4) יצרן של נוזל כביסה מעוניין לבחון שני נוזלי ניקוי מבחינת יעילותם בהסרת כתמים בשלוש רמות טמפרטורה. בכל אחד מששת הצירופים של סוג נוזל וטמפרטורה נבחנה יכולת הסרת הכתמים מבדים דומים, וניתן ציון בין 0 ל-15 (הציון הטוב ביותר).

מספר סידורי	סוג הנוזל	טמפרטורה במעלות צלזיוס	ציון הסרת כתמים
1	C	30	4
2	C	30	5
3	C	30	4
4	C	30	6
5	C	40	6
6	C	40	6
7	C	40	7
8	C	40	6
9	C	60	9
10	C	60	8
11	C	60	7
12	C	60	10
13	w	30	9
14	w	30	9
15	w	30	9
16	w	30	10
17	w	40	12
18	w	40	13
19	w	40	11
20	w	40	11
21	w	60	14
22	w	60	14
23	w	60	15
24	w	60	13



- א. כמה משתנים יש במחקר?
- ב. לגבי כל משתנה קבעו האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
- ג. כמה רמות יש לכל גורם?
- ד. אם נבצע ניתוח שונות דו-כיוונית, מה יהיו השערות המחקר?
- ה. רכזו את נתוני המחקר בטבלה שבה בשורות גורם אחד, בעמודות גורם שני ובתאים התוצאות שהתקבלו למשתנה התלוי.

**(5) קבעו לגבי כל אחד מהבאים האם הוא משתנה קטגוריאל:**

- א. מספר הניתוחים שעבר אדם בחייו.
- ב. אחוז האבטלה בישראל בחודש זה.
- ג. סוג הדם של חולה.
- ד. שונות הציונים בבחינת הבגרות באנגלית במועד האחרון.
- ה. משקל חבילה בדואר בגרמים.
- ו. היבשת שאירחה את משחקי המונדיאל.

**בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:**

- (6)** משרד החינוך רוצה לבדוק עד כמה שיטת הוראה (יש 3 שיטות הוראה מקובלות) ומגדר משפיעים על ציוני הבגרות בהיסטוריה. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים למחקר זה?
- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
  - ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
  - ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
  - ד. מבחן T לתוחלת אחת.
- (7)** מחלקת שירות הלקוחות של חברת החשמל דגמה עובדים כדי לבחון האם ככל שמספר שנות הוותק של נותן השירות גדול יותר גדל גם מספר הלקוחות שבו הוא מטפל במהלך משמרת. מהו המבחן הסטטיסטי שיכול לבדוק זאת?
- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
  - ב. ניתוח שונות חד-כיוונית.
  - ג. ניתוח שונות דו-כיוונית.
  - ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל.

**(8)** האיחוד האירופי המשותף דגם 10 עובדים מתחום ההוראה בכל אחת מהמדינות הבאות: הולנד, צרפת, בלגיה, גרמניה ואוסטריה. לכל עובד בדקו את גובה המשכורת החודשית שלו ביורו. אם נרצה להשוות בין המדינות הללו מבחינת תוחלת השכר של עובדי ההוראה במדינה, מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני
- ד. אף אחת מהאפשרויות שלעיל

**(9)** בקו ייצור 2 סוגים של מכונות ו-3 רמות ותק של מפעיל המכונה (עד שנתיים במפעל, בין שנתיים ל- חמש שנים במפעל, יותר מחמש שנים במפעל). מנהל הייצור רוצה לבדוק אם קיימת השפעה של סוג המכונה והוותק של המפעיל על מספר המוצרים הפגומים שיוצאים מהמכונה. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני.
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני.
- ד. ניתוח שונות תלת-כיווני.

**(10)** במחקר נאספו הנתונים הבאים על קבוצת נחקרים:

1. כמה כוסות קפה הנחקר שותה ביום: לא שותה / 1-2 כוסות / יותר מ-2 כוסות.

2. מין הנחקר: גבר/אישה.

3. דופק (מספר פעימות בדקה) שעתיים אחרי הקימה.

מטרת המחקר הייתה לבדוק האם מספר כוסות הקפה שאדם שותה ביום משפיע על הדופק אצל גברים אחרת מאשר אצל נשים. מה יהיה המבחן הסטטיסטי המתאים במקרה זה?

- א. מבחן T להשוואת תוחלות.
- ב. ניתוח שונות חד-כיווני.
- ג. ניתוח שונות דו-כיווני.
- ד. ניתוח שונות תלת-כיווני.

- 11** במחקר יש משתנה כמותי אחד ושני גורמים שלכל אחד מהם שתי רמות. אילו מהמשפטים הבאים אינו נכון?
- א. אפשר מבחינה טכנית לבדוק כיצד כל גורם בנפרד משפיע על המשתנה התלוי באמצעות ניתוח שונות חד-כיווני שייערך לכל גורם בנפרד.
- ב. אפשר מבחינה טכנית להשוות בין התוחלות של כל רמה בגורם הראשון על ידי מבחן T להשוואת תוחלות.
- ג. אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות דו-כיווני במערך מחקרי זה.
- ד. כיוון שבמחקר יש בסך הכול שלושה משתנים, אפשר מבחינה טכנית לבצע ניתוח שונות תלת-כיווני.

### תשובות סופיות

- 1** א. חוזק הקריעה.  
ג. ניתוח שונות חד גורמי.
- 2** א. 18  
ב. המשתנה התלוי : ציון במצב הנפש. המשתנים הב"ת : סוג חרדה, סוג הטיפול.  
ג. 3,3  
ה. ניתוח שונות דו גורמי.
- 3** א. ניתוח שונות דו גורמי.  
ג.  $H_0$  : אין אינטראקציה,  $H_1$  : יש אינטראקציה. ד.  $m = 2, n = 12$
- 4** א. 3  
ב. משתנים ב"ת : סוג הנוזל, טמפרטורה. משתנה תלוי : ציון הסרת כתמים.  
ג. 3,2  
ד.  $H_0$  : אין אינטראקציה בין הגורמים,  $H_1$  : אחרת.  
ה. עיין בסרטון הוידאו.
- 5** א. כן.  
ג. כן.  
ה. תלוי.
- 6** ג.
- 7** ד
- 8** ב
- 9** ג
- 10** ג
- 11** ד

## אפקטים פשוטים, עיקריים ואינטראקציה

### רקע

בניתוח שונות דו-כיווני אנו דנים במשתנה כמותי תלוי יחיד ובשני משתנים בלתי תלויים (גורמים) המחולקים כל אחד למספר רמות. מטרת המחקר היא לבדוק שלוש השערות שונות:

לגורם  $a$  אין השפעה על המשתנה התלוי:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

לגורם  $b$  אין השפעה על המשתנה התלוי:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

אין אינטראקציה בין שני הגורמים:  $H_0$

אחרת:  $H_1$

נרצה להבין מה בדיוק כל השערה בודקת לגבי האוכלוסייה הנחקרת.

**אפקט עיקרי:** אם יש שתי קטגוריות (רמות) לפחות של גורם מסוים שהתוחלות שלהן שונות, נאמר שלגורם זה יש השפעה על המשתנה התלוי. השפעה זאת נקראת "אפקט עיקרי". למשל, אם יימצאו לפחות שתי תרופות נוגדות דיכאון שונות שמביאות לתוחלות שונות במצב הנפשי, נגיד שלסוג התרופה יש השפעה על המצב הנפשי, כלומר יש אפקט עיקרי. כמות האפקטים העיקריים שאפשר למצוא היא כמות הגורמים במחקר.

אפקט אינטראקציה: מצב שבו גורם אחד משפיע על המשתנה התלוי באופן שונה בקטגוריות שונות של הגורם השני. למשל, תרופה נוגדת דיכאון אחת מביאה את הגברים למצב רוח טוב יותר מאשר את הנשים לעומת תרופה אחרת שמביאה דווקא את הנשים למצב רוח טוב יותר מאשר את הגברים. אפקט האינטראקציה הוא יחיד, כלומר נאמר אם יש או אין אינטראקציה. כמו כן הוא אפקט סימטרי: אם קיימת אינטראקציה בין מגדר לסוג התרופה, יש גם אינטראקציה בין סוג התרופה למגדר.

אפקט פשוט: אפקט פשוט מתייחס להשפעת גורם אחד על המשתנה התלוי בתוך קטגוריה מסוימת של הגורם השני. למשל, נרצה לבדוק רק בקטגוריה של הגברים האם קיים הבדל בין התרופות נוגדות הדיכאון. אם נמצא הבדלים כאלה נאמר שיש

אפקט פשוט של סוג התרופה בקרב אוכלוסיית הגברים. כמות האפקטים הפשוטים שאפשר למצוא היא סכום מספר הקטגוריות (רמות) של כל גורם. למשל, אם יש שלושה סוגי תרופות ושתי אפשרויות למגדר, בסך הכול נוכל לבדוק 5 אפקטים פשוטים.

### דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. כעבור שלושה חודשים בדקו כמה קילוגרמים הפחית כל מטופל ממשקלו באותה התקופה. נניח שאנו יודעים את תוחלת הפחתת המשקל של כל דיאטה בחלוקה למגדרים.

נתאר כמה מצבים אפשריים לגבי האוכלוסייה הנחקרת וננתח כל מצב מבחינת ההשפעה של כל גורם על תוחלת המשתנה התלוי ומבחינת אפקט האינטראקציה.

שימו לב שהמצבים שנתאר להלן מתייחסים לתוחלות האמיתיות. בניתוח שונות אין לנו נתוני אמת, אלא רק נתוני מדגם, ונרצה לבדוק האם האפקטים שהתקבלו במדגם הם מובהקים, כנדרש בכל תהליך של הסקה סטטיסטית.

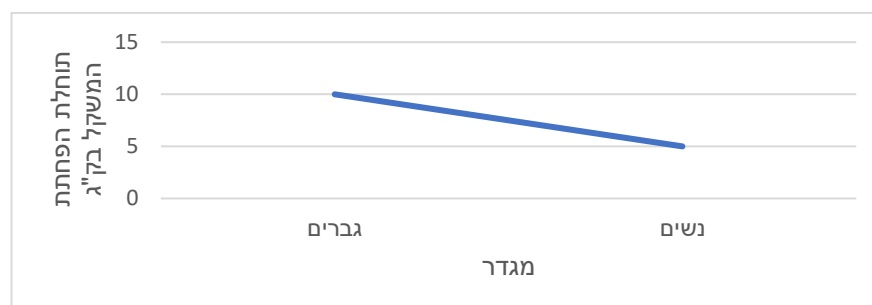
אם התוצאות שלנו יהיו ממוצעי מדגם ולא תוחלות, נוכל לבדוק אם קיימים אפקטים במדגם, אך אין זה אומר שקיימים אפקטים באוכלוסייה, כלומר לא נוכל לדעת אם האפקטים במדגם הם מובהקים. כדי לבדוק אם האפקטים הם מובהקים נצטרך לעשות את מבחן ניתוח השונות.

### מצב א:

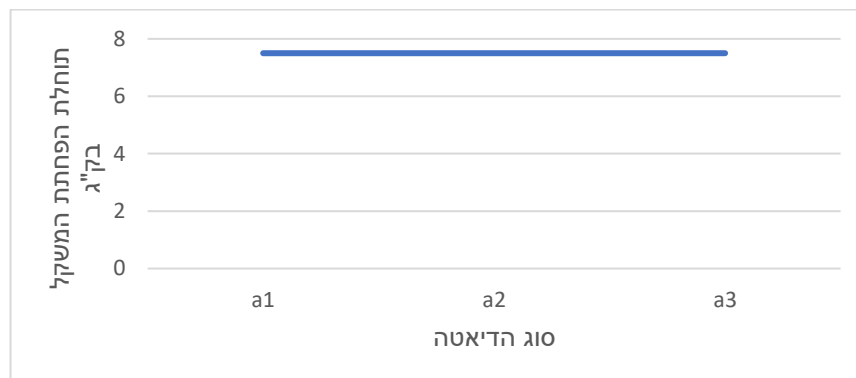
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
5	10	$a_1$
5	10	$a_2$
5	10	$a_3$

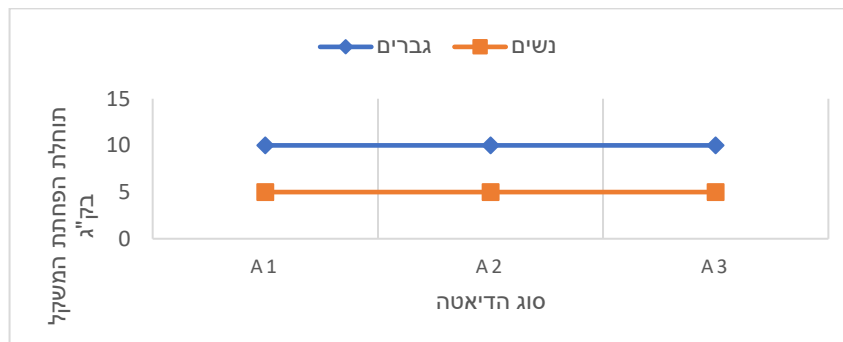
### תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



### תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



### גרף אפקטים פשוטים



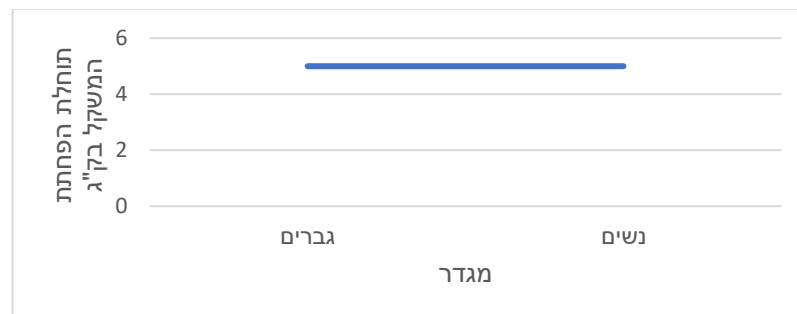
ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לסוג הדיאטה אין אפקט, אין אפקט אינטראקציה.  
הערה: אם הקווים הנוצרים בגרף האפקטים הפשוטים מקבילים או מתלכדים, אנו אומרים שאין אפקט אינטראקציה.

### מצב ב

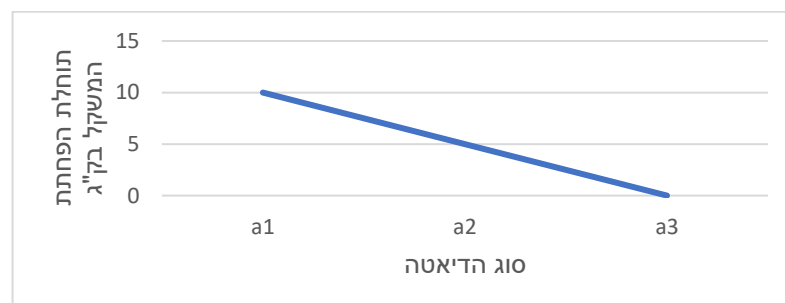
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
10	10	$a_1$
5	5	$a_2$
0	0	$a_3$

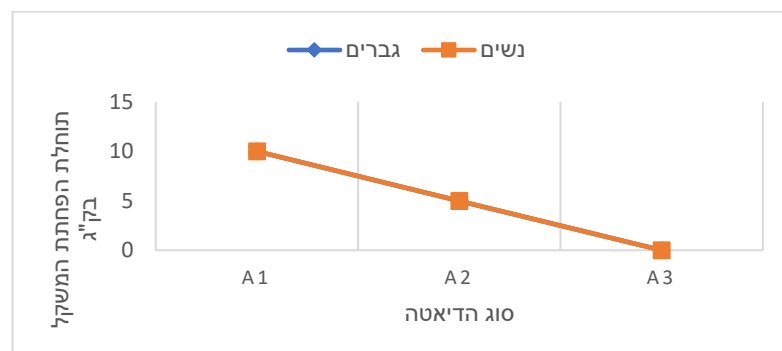
### תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



### תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



### גרף אפקטים פשוטים



ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לסוג הדיאטה יש אפקט, אין אפקט אינטראקציה.

### מצב ג

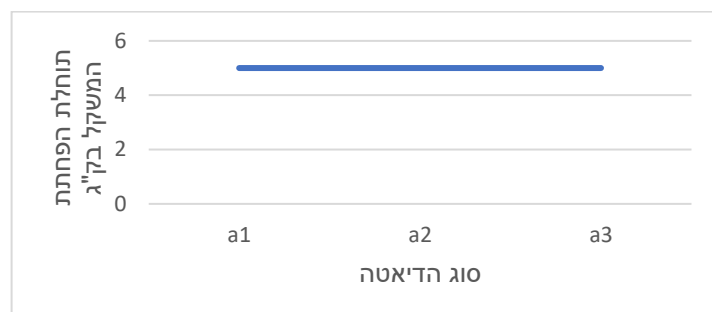
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
0	10	$a_1$
5	5	$a_2$
10	0	$a_3$

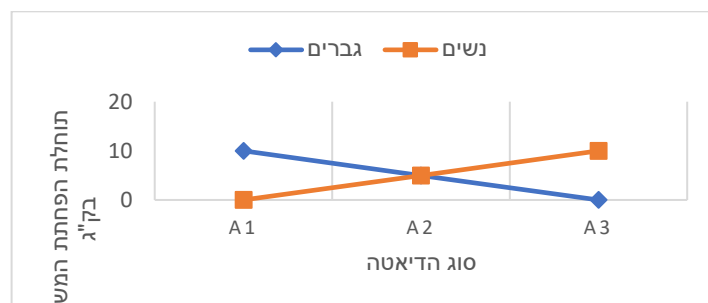
### תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



### תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



### גרף אפקטים פשוטים



ניתוח המצב: למגדר אין אפקט, לסוג הדיאטה אין אפקט, יש אפקט אינטראקציה.



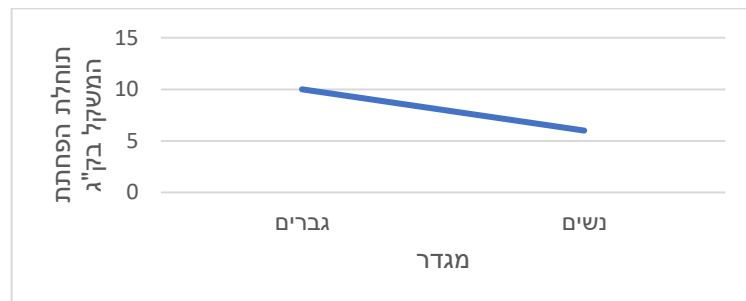
אינטראקציה דיסאורדינלית (נקראת גם "אינטראקציה מהותית"): אפשר לזהות מצב של אינטראקציה כזו באמצעות גרף של אפקטים פשוטים, כאשר נוצרים קווים נחתכים שאחד מהם עולה והאחר יורד. המשמעות היא שגורם אחד משפיע על המשתנה התלוי ברמה מסוימת של הגורם השני באופן הפוך משהוא משפיע על המשתנה התלוי ברמה אחרת של הגורם השני. במצב זה אין להתייחס לאפקטים עיקריים. יש להתייחס רק לאפקטים הפשוטים.

### מצב ה

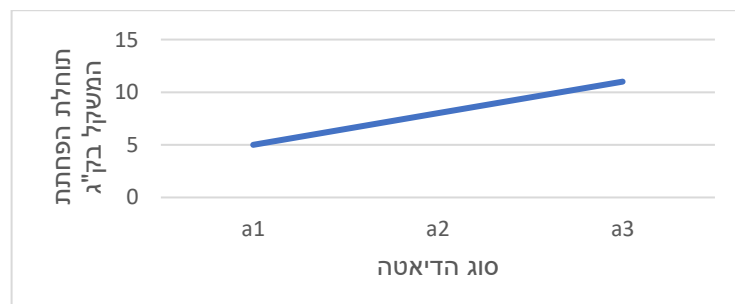
הטבלה הבאה מתארת את תוחלת הפחתת המשקל בק"ג לכל קבוצה:

נשים	גברים	
5	5	$a_1$
6	10	$a_2$
7	15	$a_3$

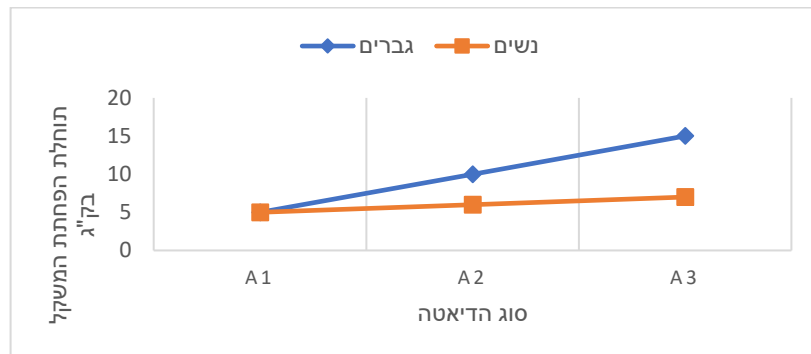
### תיאור גרפי לבדיקת אפקט למגדר



### תיאור גרפי לבדיקת אפקט לסוג הדיאטה



### גרף אפקטים פשוטים



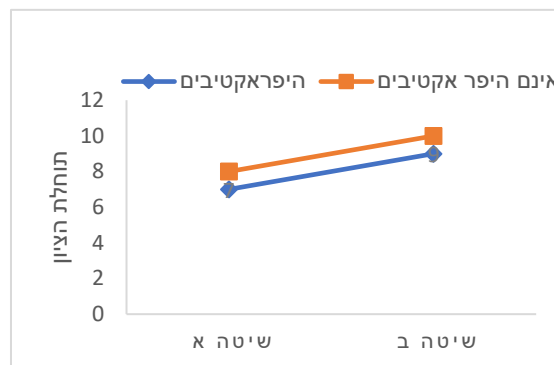
ניתוח המצב: למגדר יש אפקט, לסוג הדיאטה יש אפקט, יש אפקט אינטראקציה.

אינטראקציה אורדינלית (נקראת גם "אינטראקציה לא מהותית"): אפשר לזהות מצב של אינטראקציה כזו כאשר בגרף האפקטים הפשוטים נוצרים קווים נחתכים עם אותו הכיוון (כולם עולים או כולם יורדים אבל לא באותו השיפוע). המשמעות היא שבמעבר של גורם אחד מרמה אחת לרמה אחרת שלו הוא משפיע על המשתנה התלוי באותו אופן בכל רמה של המשתנה האחר אבל עם גודל אפקט שונה.

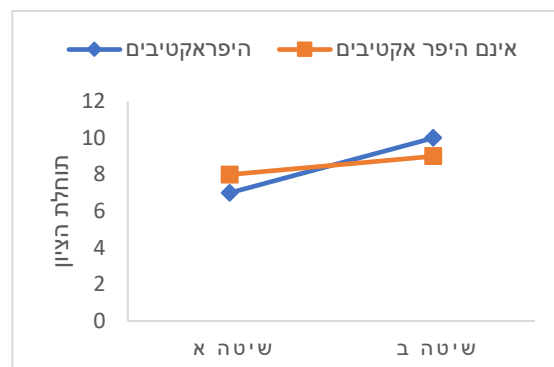
## שאלות

1) בגני החובה יש שתי שיטות הוראה. שיטות אלו נוסו על ילדים היפראקטיביים וילדים שאינם היפראקטיביים. בתרשימים הבאים מיוצגים גרפים שמתארים את תוחלת הציון במבחן אוצר המילים שניתן לילדים בסוף השנה. בכל אחד מהמקרים יש לקבוע האם קיימת אינטראקציה בין שני הגורמים. אם קיימת אינטראקציה, יש לקבוע האם היא אינטראקציה אורדינלית או דיסאורדינלית.

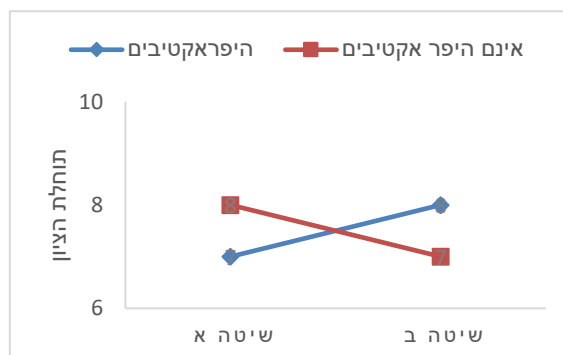
א.



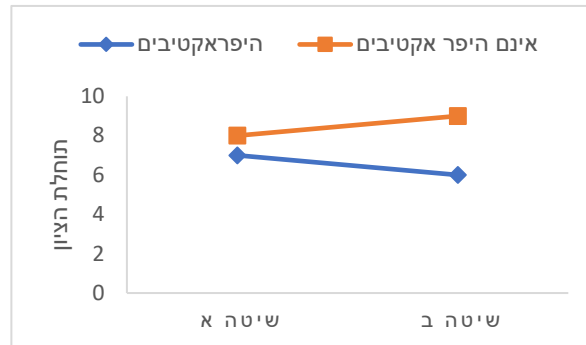
ב.



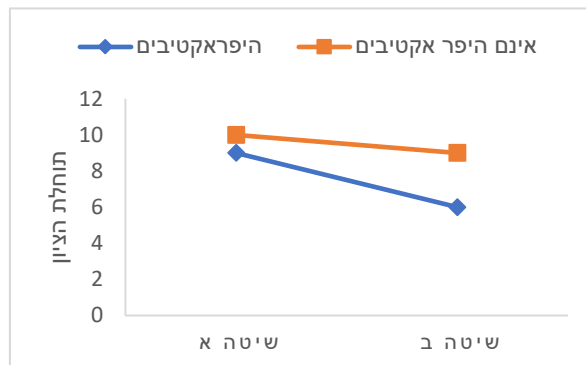
ג.



ד.



ה.



2) משרד האוצר פרסם נתונים על המחיר הממוצע של דירות גן ודירות גג של 4 חדרים ב-3 ערים בארץ. מחיר הדירות נמדד במיליוני שקלים. להלן התוצאות שהתקבלו:

דירות גן	דירות גג	
4	3	הרצליה
2	1	אשדוד
3	2	חולון

- א. מהו המשתנה התלוי ומה הם המשתנים הבלתי תלויים?
- ב. האם קיים אפקט לעיר? היעזרו בגרף מתאים.
- ג. האם קיים אפקט לסוג הדירה? היעזרו בגרף מתאים.
- ד. האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה? היעזרו בגרף מתאים.
- ה. האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גן?
- ו. האם יש אפקט פשוט לעיר עבור דירות גג?
- ז. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בהרצליה?
- ח. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה באשדוד?
- ט. האם יש אפקט פשוט לסוג הדירה בחולון?

(3) משרד החינוך פרסם נתונים על תוחלת הציונים בבחינת הבגרות באנגלית לפי עיר וסוג בית הספר (עיוני או מקצועי). להלן התוצאות שהתקבלו:

מקצועי	עיוני	
70	85	רעננה
75	75	תל אביב
85	70	פתח תקווה

- תארו את הנתונים באמצעות גרף אפקטים פשוטים.
- האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?
- באילו ערים קיים אפקט פשוט לסוג בית הספר?

(4) משרד התחבורה פרסם נתונים על תוחלת מספר עבירות התנועה לבעלי רישיון נהיגה לפי עיר ולפי מגדר. להלן התוצאות שהתקבלו:

אישה	גבר	
1	2	חיפה
1	2	אשקלון
1	2	רמת גן

- האם קיים אפקט עיקרי לעיר?
- האם קיים אפקט עיקרי למגדר?
- האם יש אפקט פשוט לעיר אצל הגברים?
- האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מהו סוג האינטראקציה?

(5) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בערים שונות בארץ בחורף ובקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו:

קיץ	חורף	
20	20	חיפה
10	10	ירושלים
15	15	באר שבע

- האם קיים אפקט עיקרי לעיר?
- האם קיים אפקט עיקרי לעונה?
- האם קיימת עיר שבה יש אפקט פשוט לעונה?
- האם קיימת אינטראקציה בין הגורמים? אם כן, מה סוג האינטראקציה?

6) המשרד לאיכות הסביבה פרסם נתונים על תוחלת רמת זיהום האוויר בערים שונות בארץ בחורף ובקיץ. להלן התוצאות שהתקבלו:

חורף	קיץ	
10	10	רמת גן
10	10	גבעתיים
10	10	בת ים

האם קיים אפקט עיקרי לגורם כלשהו? האם קיימת אינטראקציה?

**בשאלות הבאות יש לבחור את התשובה הנכונה ביותר:**

7) במחקר נדגמו 5 אנשים מכל אחת מ-4 הקבוצות הבאות: 1. מתעמלים באופן קבוע ושומרים על תזונה בריאה; 2. מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה; 3. לא מתעמלים באופן קבוע ושומרים על תזונה בריאה; 4. לא מתעמלים באופן קבוע ולא שומרים על תזונה בריאה. להלן טבלה המסכמת את ממוצע הטריגליצרידים בדם (מ"ג לדציליטר) שנמצא בכל מדגם:

לא תזונה בריאה	תזונה בריאה	
100	90	מתעמלים
160	100	לא מתעמלים

- קיים אפקט עיקרי מובהק לגורם ההתעמלות.
- קיים אפקט עיקרי מובהק לגורם התזונה.
- קיים אפקט אינטראקציה מובהק בין שני הגורמים במחקר.
- אי אפשר לדעת אם קיים אפקט מובהק כלשהו על סמך תוצאות המדגם בלבד ללא ביצוע מבחן מתאים וללא קביעת רמת המובהקות של המחקר.

8) במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. מסקנת המחקר הייתה שאצל גברים נמצאו הבדלים מובהקים בין הטיפולים השונים מבחינת תוחלת זמן התגובה. לאיזה סוג אפקט המסקנה מתייחסת?

- אפקט אינטראקציה.
- אפקט עיקרי של גורם המין.
- אפקט עיקרי של גורם סוג הטיפול.
- אפקט פשוט.

- (9)** במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. במדגם היה ממוצע זמן התגובה של הגברים שונה מממוצע זמן התגובה של הנשים.
- א. אפשר להגיד שבמדגם קיים אפקט עיקרי, אך אי אפשר לדעת אם האפקט העיקרי מובהק.
- ב. אפשר להגיד שבמדגם קיימת אינטראקציה, אך אי אפשר לדעת אם האינטראקציה מובהקת.
- ג. אפשר להגיד שקיים אפקט עיקרי מובהק.
- ד. אפשר להגיד שקיימת אינטראקציה מובהקת.
- (10)** במחקר בדקו 3 טיפולים שונים לחולי פסוריאזיס. המחקר השווה גם בין גברים לנשים ובדק את זמן התגובה לטיפול. אחת המסקנות של המחקר הייתה שהטיפול השונים משפיעים במידה משמעותית יותר על זמן התגובה של הגברים מאשר על זה של הנשים, אם כי באותו האופן.
- א. המסקנה היא שאין אינטראקציה בין הגורמים במחקר.
- ב. המסקנה היא שיש אינטראקציה אורדינלית בין הגורמים במחקר.
- ג. המסקנה היא שיש אינטראקציה דיסאורדינלית בין הגורמים במחקר.
- ד. המסקנה היא שיש אפקט עיקרי של המגדר.

### תשובות סופיות

- (1)** א. אין אינטראקציה.  
ג. אינטראקציה דיסאורדינלית.  
ה. אינטראקציה אורדינלית.
- (2)** א. המשתנים הב"ת: העיר, סוג הדירה. המשתנה התלוי: מחיר.  
ב. קיים.  
ד. לא קיים.  
ו. קיים.  
ח. קיים.
- (3)** א. עיין בסרטון הוידאו.  
ג. רעננה ופתח תקווה.
- (4)** א. לא.  
ג. לא.
- (5)** א. כן.  
ג. לא.
- (6)** לא, לא.
- (7)** ד
- (8)** ד
- (9)** א
- (10)** ב
- ב. אינטראקציה אורדינלית.  
ד. אינטראקציה דיסאורדינלית.
- ג. קיים.  
ה. קיים.  
ז. קיים.  
ט. קיים.
- ב. אינטראקציה דיסאורדינלית.
- ב. כן.  
ד. לא.  
ב. לא.  
ד. לא.

## תהליך ניתוח שונות דו כיווני – הליך מבחן

### רקע

כפי שכבר ציינו, ניתוח שונות דו-כיווני נעשה כאשר יש שני גורמים מחקרניים ומשתנה כמותי תלוי אחד. מטרת המחקר היא לבדוק האם הגורמים משפיעים על המשתנה התלוי. מערך מחקר זה נקרא "מערך מחקר פקטוריאלי", כיוון שאנו בונים את המחקר לפי גורמים. מערך דו-גורמי יסומן כמערך מסוג  $A \times B$ , כאשר  $A$  מייצג את מספר הרמות של גורם  $a$ , ו- $B$  מייצג את מספר הרמות של גורם  $b$ . במערך מחקרי תלת-גורמי נסמן את סוג המערך  $A \times B \times C$ , וכך הלאה.

### דוגמה

נבדקו שלושה סוגי דיאטות על אנשים בעלי משקל עודף. נבחרו 18 מטופלים בעלי משקל עודף, 9 מהם גברים ו-9 נשים. המטופלים חולקו כך שבכל דיאטה השתתפו 3 גברים ו-3 נשים. כעבור שלושה חודשים מתחילת הדיאטה נשקלו כלל המטופלים ונבדק המשקל בק"ג שהם הפחיתו. הטבלה הבאה מסכמת את המשקל שכל מטופל במדגם הפחית כעבור שלושה חודשים.

סוג הדיאטה \ מין	$b_1$	$b_2$	$b_3$	סה"כ
נשים	8 4 0	6 8 10	4 6 8	54
גברים	6 10 14	0 2 4	9 12 15	72
סה"כ	42	30	54	126

מטרת המחקר היא לבדוק האם יש השפעה של סוג הדיאטה, המין והשילוב ביניהם על ההפחתה במשקל.

- באיזה סוג מערך מחקרי מדובר?
- מהו המבחן הסטטיסטי המתאים לבדיקת ההשערות?
- מה הן השערות המחקר?



בדומה לניתוח שונות חד-כיווני גם התהליך של ניתוח שונות דו-כיווני דורש הנחות. ההנחות הן:

1.  $A \times B$  הקבוצות שנוצרות בלתי תלויות זו בזו.
2. בכל  $A \times B$  האוכלוסיות המשתנה התלוי מתפלג נורמלית.
3. בכל  $A \times B$  האוכלוסיות אותה שונות,  $\sigma^2$ .

הערה: ניתוח שונות הוא מבחן רובסטי, כלומר יש לו רגישות נמוכה להנחות. התיאוריה הסטטיסטית שפותחה התבססה על ההנחות האלה, אבל הלכה למעשה השיטה תעבוד טוב גם אם ההנחות הללו לא יתקיימו במדויק במלואן. זו הסיבה שהשיטה הזו נפוצה כל כך בעולם הסטטיסטיקה.

#### בהמשך לדוגמה

רשמו את כל ההנחות הדרושות לביצוע ניתוח השונות.

### הליך המבחן

בניית טבלת ממוצעים

נבנה טבלת ממוצעים לכל רמה ולכל תא :

$\bar{X}_{i.}$  – ממוצע המדגם ברמה  $i$  של גורם  $a$

$\bar{X}_{.j}$  – ממוצע המדגם ברמה  $j$  של גורם  $b$

$\bar{X}_{ij}$  – ממוצע המדגם בתא  $ij$

### בהמשך לדוגמה

- מלאו את טבלת הממוצעים הבאה :

סוג הדיאטה \ מין	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\bar{X}_{i.}$
נשים				
גברים				
$\bar{X}_{.j}$				

- שרטטו גרפים מתאימים לבדיקת אפקטים עיקריים ולבדיקת אינטראקציה במדגם. האם אפשר להגיד שיש אפקט מובהק?

**בניית טבלת ריבועי הפרשים מהממוצעים**

נמלא את הטבלה הבאה. בתוך תא  $ij$  נחשב:  $(\bar{X}_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X})^2$

**בהמשך לדוגמה**

- מלאו את טבלת הפרשי הממוצעים:

סוג הדיאטה מין \	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$(\bar{X}_i - \bar{X})^2$
נשים				
גברים				
$(\bar{X}_j - \bar{X})^2$				

### חישוב סכום ריבועי הסטיות מהממוצע

מתוך טבלת ריבועי הסטיות מהממוצע נחשב את סכום ריבועי הסטיות מהממוצע הבאים :

הסימון  $SS$  הוא ראשי התיבות של "sum of squares" (סכום הריבועים).

$$SS_a = m \cdot B \sum_{i=1}^A (\bar{X}_{i.} - \bar{X})^2 \quad \text{סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם } a:$$

$$SS_b = m \cdot A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 \quad \text{סכום ריבועי הסטיות מהממוצע של גורם } b:$$

$$SS_{ab} = m \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{.j} + \bar{X})^2 \quad \text{סכום ריבועי הסטיות של האינטראקציה:}$$

סכום ריבועי השגיאות (סכום ריבועי הסטיות של התצפיות בתא מהממוצע בתא) :

$$SS_W = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X}_{ij})^2 = (m-1) \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B S_{ij}^2$$

סכום ריבועי הסטיות של כלל התצפיות מהממוצע הכללי :

$$SS_T = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^m (X_{ijk} - \bar{X})^2 = (n-1) \cdot S^2$$

הקשר המתמטי בין סכום הריבועים הללו הוא :

$$SS_T = SS_a + SS_b + SS_{ab} + SS_W$$

לכן אין אנו צריכים לחשב את כל חמשת המרכיבים הללו.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות השיטתית :  $SS_a + SS_b + SS_{ab}$ . השונות השיטתית היא שונות שמקורה בגורמים עצמים.

החלק הזה של הנוסחה מתייחס לשונות המקרית :  $SS_W$ . השונות המקרית היא שונות שנקראת גם "שונות טעויות" או "שונות בתוך הקבוצות". זוהי שונות בין התצפיות שאינה נובעת מהגורמים הנחקרים. האות  $W$  מייצגת את המילה "Within", כלומר שונות **בתוך** התאים.



בהמשך לדוגמה

- חשבו את ריבועי הסטיות הבאים :

$$SS_a =$$

$$SS_b =$$

$$SS_{ab} =$$

$$SS_T =$$

$$SS_w =$$

### חישוב ממוצע ריבועי הסטיות וסטטיסטי המבחן

MS הוא הסימון של ממוצע ריבועי הסטיות (Mean Square) שמהווה אומד לשונות של כל גורם. החישוב יעשה על ידי חלוקת ה-SS המתאים בדרגות החופש המתאימות. לאחר מכן נחשב שלושה סטטיסטי מבחן, בהתאם לשלוש ההשערות הנבדקות.

נרכז את כלל החישובים הללו בטבלה הנקראת טבלת ניתוח שונות, ANOVA (Analysis of Variance).

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square	$F$
$a$	$A - 1$	$SS_a$	$MS_a$	$F_a = MS_a / MS_w$
$b$	$B - 1$	$SS_b$	$MS_b$	$F_b = MS_b / MS_w$
$ab$	$(A - 1)(B - 1)$	$SS_{ab}$	$MS_{ab}$	$F_{ab} = MS_{ab} / MS_w$
Within	$AB(m - 1)$	$SS_w$	$MS_w$	
Total	$n - 1 = ABm - 1$	$SS_T$		

בהמשך לדוגמה: מלאו את טבלת ניתוח השונות

מקור השונות Source of Variation	דרגות החופש Degrees of Freedom	סכום ריבועי הסטיות מהממוצע Sum of Squares	ממוצע ריבוע הסטייה Mean Square	$F$
$a$				
$b$				
$ab$				
Within				
Total				

### כללי ההכרעה לבדיקת ההשערות

הסטטיסטי  $F_a$  מייצג את היחס בין השונות המדגמית של גורם  $a$  ובין השונות המקרית. לכן ככל שהערכים שלו גבוהים יותר, נרצה להגיד שלגורם  $a$  יש השפעה גדולה יותר על המשתנה התלוי.  $F_a$  יקבל ערכים גבוהים אם השונות המדגמית של גורם A תגדל או אם השונות המדגמית המקרית תקטן. הסטטיסטי מתפלג התפלגות  $F$ , ואזור הדחייה שלו יהיה בצד ימין.

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם  $a$ :

דחה את השערת  $H_0$  ברמת מובהקות של  $\alpha$  אם

$$F_a > F_{1-\alpha}(df_a, df_w)$$

לפי אותו עיקרון שאר כללי ההכרעה יהיו:

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של גורם  $b$ :

דחה את השערת  $H_0$  ברמת מובהקות של  $\alpha$  אם

$$F_b > F_{1-\alpha}(df_b, df_w)$$

- כלל ההכרעה לבדיקת המובהקות של האינטראקציה:

דחה את השערת  $H_0$  ברמת מובהקות של  $\alpha$  אם

$$F_{ab} > F_{1-\alpha}(df_{ab}, df_w)$$

### בהמשך לדוגמה

רשמו את כל כללי ההכרעה המתאימים והסיקו מסקנות מתאימות ברמת מובהקות של 5%.

### הערות

1. אם מכריעים שקיימת אינטראקציה מובהקת, יש לבדוק האם היא אורדינלית או דיסאורדינלית. אם האינטראקציה דיסאורדינלית, יש לבדוק האם האפקטים העיקריים נמצאו מובהקים. אם לפחות אחד מהם נמצא מובהק נאמר שהוא אינו משמעותי כיוון שהוא נובע מהאינטראקציה בין הגורמים ולא מהגורם עצמו.
2. אם אחד מהאפקטים נמצא מובהק, אין זה אומר אילו רמות שונות זו מזו בתוחלת. למשל, אם נמצא הבדל מובהק בין סוגי הטיפולים, לא נוכל לדעת לפי זה איזה טיפול שונה מאחר באופן מובהק. לכן יש להמשיך בתהליך של השוואות מרובות כדי להסיק ממה נובע השוני.

### בהמשך לדוגמה

האם יש סיבה לבצע השוואות מרובות במחקר?



## שאלות

1) מחקר שיווקי בדק את השפעת גובה המדף בסופרמרקט והשפעת החומר שממנו עשוי הבקבוק (זכוכית או פלסטיק) על היקף המכירות של משקאות קלים. נבדקו שני סופרמרקטים. בכל סופרמרקט נבחן כל צירוף אפשרי של גובה המדף וחומר הבקבוק, ועבור כל צירוף כזה נבדק מספר בקבוקי המשקה הקל שנמכרו באותו סופרמרקט ביום מסוים. הנה התוצאות שהתקבלו:

פלסטיק	זכוכית	סוג בקבוק / גובה המדף
		גובה המדף
59	23	נמוך
63	32	
88	47	בינוני
90	55	
51	40	גבוה
56	48	

בצעו ניתוח שונות דו-כיוונית על נתוני מחקר זה ברמת מובהקות של 5%. סכמו את המסקנות מתוך ניתוח השונות שביצעתם. מה הן ההנחות הדרושות לביצוע המבחן?

**(2)** במחקר בתחום החקלאות נדגמו 8 חלקות אדמה: 4 חלקות בנגב ו-4 בעמק יזרעאל. בכל חלקה ההשקיה הייתה או באמצעות ממטרות או באמצעות טפטפות. בדקו את יכול העגבניות (בטונה לדונם) בכל חלקה. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר חלקה	מיקום החלקה	שיטת השקיה	יכול העגבניות
1	נגב	ממטרות	12
2	נגב	ממטרות	10
3	נגב	טפטפות	15
4	נגב	טפטפות	17
5	עמק יזרעאל	ממטרות	12
6	עמק יזרעאל	ממטרות	14
7	עמק יזרעאל	טפטפות	17
8	עמק יזרעאל	טפטפות	19

- א. רשמו את כלל המשתנים במחקר וציינו לגבי כל אחד מהם האם הוא משתנה תלוי או בלתי תלוי.
- ב. הציגו את נתוני המחקר באמצעות גרפים מתאימים. האם נראה שבמדגם יש אפקט עיקרי לכל גורם? האם יש אינטראקציה בין הגורמים במדגם? האם האפקטים מובהקים?
- ג. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם האפקט העיקרי של כל גורם הוא מובהק והאם האינטראקציה היא מובהקת. מה הן ההנחות הדרושות?

- (3) חברה לייצור מוצרי שיער פיתחה נוסחה חדשנית לצבע לשיער שאינו דורש תוספת חמצן בעת תהליך הצביעה. החברה השוותה את צבע השיער החדש לצבע השיער הרגיל מבחינת כושר הכיסוי וזאת על שלושה סוגי שיער: בהיר, כהה ושיבה. ציון רמת הכיסוי הוא משתנה שמתפלג נורמלית עם שונות קבועה לכל סוג שיער ולכל סוג צבע. לכל קבוצה של סוג צבע וסוג שיער נדגמו 4 צביעות שנוסו על אנשים שונים, וניתן ציון מספרי על רמת הכיסוי. להלן סיכום תוצאות המדגם שהתקבלו:

שונות	ממוצע	הקבוצה
40	62	צבע רגיל על שיער בהיר
44	51	צבע רגיל על שיער כהה
42	45	צבע רגיל על שיער שיבה
46	60	צבע חדש על שיער בהיר
40	54	צבע חדש על שיער כהה
42	44	צבע חדש על שיער שיבה

בצעו ניתוח שונות דו-כיווני על הנתונים ברמת מובהקות של 5%. סכמו את כל המסקנות המתקבלות.

- (4) בוצע ניתוח שונות על נתונים. במערך המחקרי לגורם  $a$  יש 4 רמות ולגורם  $b$  יש 3 רמות. נערכו 3 תצפיות לכל אחת מ-12 הקבוצות שנוצרו. להלן טבלת ניתוח שונות דו-גורמי שבוצע:

מקור השונות	$df$	SS	MS	F
$a$	?	318	?	?
$b$	?	?	?	?
אינטראקציה	?	190	?	?
W	?	156	?	
T	?	674		

- מלאו את כל התאים בטבלה המסומנים בסימני שאלה.
- בצעו את הבדיקות הבאות ברמת מובהקות של 5%:
  - האם האינטראקציה מובהקת?
  - האם גורם  $a$  משפיע על המשתנה התלוי הנחקר?
  - האם לגורם  $b$  יש לפחות שתי רמות עם תוחלות שונות?

5) במחקר בדקו האם ארץ מוצא ומגדר של אדם משפיעים על שנות ההשכלה שלו. הנתונים סוכמו בטבלת ניתוח שונות:

מקור השונות	df	SS	MS	F
ארץ מוצא	4	34		
מגדר			2	
אינטראקציה		18	4.5	
W	10	12		
T				

- כמה ארצות מוצא נבדקו במחקר זה?
- מהו גודל המדגם הכולל במחקר זה?
- חשבו את ערכי F הסטטיסטי עבור ארץ המוצא, המגדר והאינטראקציה.
- מה הם האפקטים המובהקים במחקר זה ברמת מובהקות של 5%?

6) בטבלה הבאה מסוכמים הממוצעים של מערך מחקרי דו-גורמי עם משתנה כמותי תלוי :

	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$a_1$	8	14	11
$a_2$	6	13	16

מספר התצפיות בכל תא הוא 5.  
הטבלה הבאה היא טבלה מסכמת של ניתוח השונות על סמך נתוני מחקר זה :

מקור השונות	df	SS	MS	F
$a$				
$b$		281.7		
$ab$		71.7		
W		190.1		
T				

- א. מלאו את טבלת ניתוח השונות.
- ב. הסיקו מסקנות ברמת מובהקות של 5%.
- ג. שרטטו גרף אינטראקציות והסבירו את משמעות הממצאים.

### תשובות סופיות

- 1) עיין בסרטון הוידאו.
- 2) א. משתנים ב"ת : מיקום החלקה, שיטת השקיה. משתנה תלוי : יבול בטונה לדונם.  
ב. עיין בסרטון הוידאו.  
ג. עיין בסרטון הוידאו.
- 3) עיין בסרטון הוידאו.
- 4) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. i. כן. ii. כן. iii. לא.
- 5) א. 4 ב. 20 ג. עיין בסרטון הוידאו.
- ד. עיין בסרטון הוידאו.
- 6) א. עיין בסרטון הוידאו. ב. עיין בסרטון הוידאו. ג. עיין בסרטון הוידאו.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 24 - מבחני חי בריבוע

תוכן העניינים

144	1. מבחן לאי תלות.....
148	2. מקדם המתאם של קרמר.....
150	3. ניתוח פלטים במבחן אי תלות.....

## מבחן חי בריבוע לאי תלות בין משתנים – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים. שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

**מבנה המבחן:**

**השערות:**

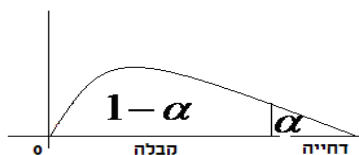
אין תלות בין המשתנים  $H_0$ .

יש תלות בין המשתנים  $H_1$ .

**כלל הכרעה:**

הערך הקריטי נקבע על סמך התפלגות חי בריבוע. התפלגות זו היא אסימטרית חיובית ותלויה בדרגות החופש  $d.f = (r-1)(c-1)$ . כאשר:  $r$  - מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות.  $c$  - מספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

הערך הקריטי הוא:  $\chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$ , כלומר האחוזון ה- $1-\alpha$  בהתפלגות חי בריבוע שדרגות החופש הן  $(r-1)(c-1)$ . אם  $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha, (r-1)(c-1)}$  אז דוחים את השערת האפס.



$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

כאשר:

$O_i$  - השכיחות נצפית במדגם בתא  $i$ .

$E_i$  - שכיחות צפויה במדגם בתא  $i$  בהנחת השערת האפס.

$$E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$$

**הערה:**

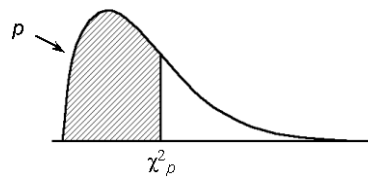
תנאי כדי לבצע את המבחן הוא  $E_i \geq 5$  לכל  $i$ . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.  
 תנאי חלופי: אין  $E$  קטן מ-1 וגם אין ביותר מ 20% מהתאים  $E$  קטן מ-5.

**דוגמה (הפתרון בהקלטה):**

האם יש תלות בין המגדר לבין דעה מסוימת?  
 יש לבדוק ברמת מובהקות של 5% על סמך תוצאות הסקר:

המגדר / דעה	בעד	נגד	נמנע	סה"כ
גברים	50	40	10	
נשים	20	60	20	
סה"כ				



טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה  $\chi^2_p$ 

df	$p$												
	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1	0.004393	0.00157	0.00982	0.02393	0.0158	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

## שאלות

- (1) נבדקה התלות בין גודל הארגון לבין שביעות הרצון של העובדים. להלן התוצאות:

שביעות רצון גודל המפעל	נמוכה	בינונית	גבוהה	סה"כ
גדול	182	203	215	600
קטן	154	110	136	400
סה"כ	336	313	351	1000

מה המסקנה ברמת מובהקות של 2.5%?

- (2) מפעל עובד בשלוש משמרות. להלן מספר המוצרים הפגומים והתקינים בכל אחת מן המשמרות לפי מדגם שנעשה:

לילה	ערב	יום	
70	60	50	פגומים
800	700	600	תקינים

האם יש הבדל בין שיעורי הפגומים במשמרות השונות?  
הסיקו עבור רמת מובהקות  $\alpha = 0.05$ .

- (3) נדגמו 50 מוצרים ממפעל מסוים מתוך 30 מוצרים שיוצרו ביום 17 נבחרו לייצוא מתוך המוצרים שיוצרו בלילה 10 נבחרו לייצוא. האם יש קשר בין היות מוצר לייצוא למועד שבו הוא יוצר? בדקו ברמת בטחון של 95%.

## תשובות סופיות

- (1) נסיק שיש קשר בין גודל הארגון לשביעות הרצון של העובדים.  
(2) נסיק שאין הבדל מובהק בין שיעור הפגומים במשמרות השונות.  
(3) נסיק שאין קשר בין היות מוצר לייצוא למועד שבו הוא יוצר.

## מדדי קשר-מדד הקשר של קרמר – רקע

מתי משתמשים במדד הזה? - כאשר אחד המשתנים הוא מסולם שמי והשני מכל סולם אפשרי. מדד הקשר מקבל ערכים בין 0 ל-1. ככל שהמדד יותר קרוב לאחד קיים קשר בעוצמה יותר חזקה בין המשתנים.

### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במחקר רוצים לבדוק את הקשר בין מין לדעה בנושא מסוים, שאלו 100 גברים ו-100 נשים האם הם בעד/נגד/נמנעים באיזשהו נושא. להלן טבלת השכיחויות המשותפת שהתקבלה.

$f(x)$	נמנע	נגד	בעד	$X/Y$
100	10	40	50	גבר
100	10	60	30	אישה
$n = 200$	20	100	80	$f(y)$

בהקשר של קרמר הטבלה נקראת טבלת O (observed)

$X$  - מין (גבר/אישה) – סולם שמי.

$Y$  - דעה (בעד/נמנע/נגד) – סולם שמי/סדר.

### שלבים בחישוב $r_c$ :

#### שלב א' :

נבנה את טבלת E (Expected)

נעתיק את המסגרת של טבלת O ואז כל  $E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$

$f(x)$	נמנע	נגד	בעד	$X/Y$
100				גבר
100				אישה
$n=200$	20	100	80	$f(y)$

#### שלב ב' :

נחשב  $\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$

#### שלב ג' :

נחשב:  $r_c = \sqrt{\frac{1}{n(L-1)} \chi^2}$

כאשר  $L$  מבטא את המספר הקטן מבין מספר השורות או העמודות.

## שאלות

- (1) להלן תוצאות מחקר שבדק את הקשר בין מין להשכלה. לגבי כל נחקר נבדק המין שלו והשכלתו.

מין / השכלה	נמוכה	תיכונית	גבוהה
גבר	120	40	20
אישה	20	20	80

להלן התוצאות:

האם קיים קשר בין מין להשכלה? נמקו!

- (2) נלקחו 200 אנשים שמתוכם 60 הצהירו שהם עוסקים בפעילות גופנית סדירה. מתוך אלו שעוסקים בפעילות גופנית סדירה 50 נמצאו במצב בריאותי תקין. מתוך אלו שלא עוסקים בפעילות גופנית סדירה 90 נמצאו במצב בריאותי תקין.

א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים שהוצגו בשאלה.

ב. האם קיים קשר בין פעילות גופנית למצב בריאותי?

חשבו לפי מדד הקשר של קרמר.

## תשובות סופיות

- (1) קיים קשר בעוצמה בינונית בין המין להשכלה מקדם המתאם של קרמר הוא 0.595.
- (2) א. להלן טבלה: ב. מדד קרמר 0.19 מעיד על קשר בעוצמה נמוכה.

$y/x$	תקין	לא תקין	$f(x)$
כן	50	10	60
לא	90	50	140
$f(y)$	140	60	200

## פליטים על מבחן לאי תלות – רקע

מבחן לאי תלות מטרתו לבדוק האם קיים קשר בין שני משתנים. שני המשתנים שנבדקים צריכים להיות מחולקים למספר קטגוריות.

**מבנה המבחן:**

**השערות:**

אין תלות בין המשתנים:  $H_0$ .

יש תלות בין המשתנים:  $H_1$ .

דרגות חופש:  $d.f = (r-1)(c-1)$ .

כאשר:  $r$  - מספר הקטגוריות של המשתנה שבשורות.

$c$  - ספר הקטגוריות של המשתנה שבעמודות.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad \text{סטטיסטי המבחן:}$$

$O_i$  - השכיחות נצפית במדגם בתא  $i$ .

$E_i$  - שכיחות צפויה במדגם בתא  $i$  בהנחת השערת האפס.

$$E_i = \frac{f(x) \cdot f(y)}{n}$$

**הערה:**

תנאי כדי לבצע את המבחן הוא  $E_i \geq 5$  לכל  $i$ . במידה ותנאי זה לא מתקיים יש

אפשרות לאחד קטגוריות סמוכות עד שהתנאי יתקיים.

תנאי חלופי: אין  $E$  קטן מ-1 וגם אין ביותר מ-20% מהתאים  $E$  קטן מ-5.

### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

במחקר רצו לבדוק את הקשר בין צבע שיער לבין צבע עיניים של אנשים. הפלטים שהתקבלו מצורפים.

- א. מהו המבחן הסטטיסטי המתאים?
- ב. כמה קטגוריות יש לכל משתנה?
- ג. רשמו את השערות המחקר.
- ד. מה מספר דרגות החופש?
- ה. כמה אנשים במדגם נמצאו עם שיער חום?
- ו. כמה אנשים היית מצפה במדגם שיהיה להם שיער חום ועיניים ירוקות בהנחה ואין קשר בין צבע שיער לצבע עיניים?
- ז. מתוך הבלונדינים מה אחוז בעלי עיניים כחולות במדגם?
- ח. מתוך בעלי עיניים ירוקות מה אחוז הבלונדינים במדגם?
- ט. מה ערכו של סטטיסטי המבחן ומהי מובהקות התוצאה?
- י. מה מסקנת המחקר?  $\alpha = 5\%$

להלן הפלטים שהתקבלו :

## Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
hair_color * eye_color	78	100.0%	0	0.0%	78	100.0%

## hair\_color \* eye\_color Crosstabulation

			eye_color			Total
			brown	green	Blue	
hair_color	black	Count	13	7	7	27
		Expected Count	10.7	8.3	8.0	27.0
		% within hair_color	48.1%	25.9%	25.9%	100.0%
		% within eye_color	41.9%	29.2%	30.4%	34.6%
	brown	Count	12	12	6	30
		Expected Count	11.9	9.2	8.8	30.0
		% within hair_color	40.0%	40.0%	20.0%	100.0%
		% within eye_color	38.7%	50.0%	26.1%	38.5%
	blond	Count	6	5	10	21
		Expected Count	8.3	6.5	6.2	21.0
		% within hair_color	28.6%	23.8%	47.6%	100.0%
		% within eye_color	19.4%	20.8%	43.5%	26.9%
	Total	Count	31	24	23	78
		Expected Count	31.0	24.0	23.0	78.0
		% within hair_color	39.7%	30.8%	29.5%	100.0%
		% within eye_color	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

## Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	5.880 <sup>a</sup>	4	.208
Likelihood Ratio	5.641	4	.228
Linear-by-Linear Association	2.682	1	.101
N of Valid Cases	78		

a. 0 cells (0.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 6.19.

## שאלות

- 1) בסקר שנעשה על ידי משרד ראש הממשלה נדגמו 60 אזרחים. כל אזרח נשאל על מגדרו והאם הוא בעד הקמת מדינה פלסטינית.
- א. מה ההשערות הנבדקות ומהו סטטיסטי המבחן?
  - ב. אם סטטיסטי המבחן היה גדל כיצד הדבר היה משפיע על SIG שבפלט.
  - ג. האם קיים קשר בין מגדר ודעה ברמת מובהקות של 5%?
  - ד. מהו האומדן לאחוז התומכים במדינה פלסטינית מתוך הגברים?
  - ה. איזה אחוז מהנשאלים שהיו בעד מדינה פלסטינית הם גברים?



להלן הפלטים:

## Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	1.973 <sup>a</sup>	2	.373
Likelihood Ratio	1.987	2	.370
Linear-by-Linear Association	1.882	1	.170
N of Valid Cases	60		

a. 0 cells (.0%) have expected count less than 5.

b. The minimum expected count is 7.25.

## gender \* opinion Crosstabulation

			opinion			Total
			yes	now	no opinion	
gender	Male	Count	10	10	9	29
		Expected Count	12.6	9.2	7.3	29.0
		% within gender	34.5%	34.5%	31.0%	100.0%
		% within opinion	38.5%	52.6%	60.0%	48.3%
		% of Total	16.7%	16.7%	15.0%	48.3%
	female	Count	16	9	6	31
		Expected Count	13.4	9.8	7.8	31.0
		% within gender	51.6%	29.0%	19.4%	100.0%
		% within opinion	61.5%	47.4%	40.0%	51.7%
		% of Total	26.7%	15.0%	10.0%	51.7%
Total		Count	26	19	15	60
		Expected Count	26.0	19.0	15.0	60.0
		% within gender	43.3%	31.7%	25.0%	100.0%
		% within opinion	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
		% of Total	43.3%	31.7%	25.0%	100.0%

2) להלן פלט על סמך סקר שנעשה בקרב סטודנטים, בסקר נשאלו הסטודנטים על המוזיקה אותה הם מעדיפים וצורת הבילוי המועדפת עליהם.

Crosstab

Count

		בילוי			Total
		קריאה	ספורט	מועדון	
מוזיקה	רוק	0	0	11	11
	פופ	1	6	8	15
	קלאסי	5	6	9	20
Total		6	12	28	46

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	11.929 <sup>a</sup>	?	.018
N of Valid Cases	46		

a. 5 cells (55.6%) have expected count less than 5.

b. The minimum expected count is 1.43.

- א. בין אלו משתנים נבדק הקשר? כמה קטגוריות לכל משתנה?
- ב. האם התנאים של המודל מתקיימים?
- ג. מה מספר דרגות החופש במבחן הני"ל?
- ד. מה ההשערות של המבחן?

- (3) מחקר התעניין לבדוק את הקשר בין רמת הכנסה של משפחה לבין צריכת עגבניות אורגניות. הפלטים מצורפים.
- א. השלימו את שלושת המספרים החסרים בטבלה (היכן שיש סימני שאלה).
- ב. מה ערכו של חי בריבוע הסטטיסטי.
- ג. תנו הערכה למובהקות התוצאה לבדיקת הקשר בין רמת הכנסה של משפחה לבין צריכת עגבניות אורגניות.

Crosstabulation רמת\_הכנסה \* צרכן עגבניות

		צרכן עגבניות		Total
		אורגני	לא אורגני	
הרבה מתחת לממוצע רמת_הכנסה	Count	17	42	59
	% within רמת_הכנסה	28.8%	?	100.0%
	% within צרכן עגבניות	13.6%	33.6%	23.6%
מתחת לממוצע	Count	27	22	49
	% within רמת_הכנסה	55.1%	44.9%	100.0%
	% within צרכן עגבניות	?	17.6%	19.6%
ממוצע	Count	31	29	60
	% within רמת_הכנסה	51.7%	48.3%	100.0%
	% within צרכן עגבניות	24.8%	23.2%	24.0%
מעל הממוצע	Count	44	26	70
	% within רמת_הכנסה	62.9%	37.1%	100.0%
	% within צרכן עגבניות	35.2%	20.8%	28.0%
הרבה מעל הממוצע	Count	?	6	12
	% within רמת_הכנסה	50.0%	50.0%	100.0%
	% within צרכן עגבניות	4.8%	4.8%	4.8%
Total	Count	125	125	250

- 4) חוקר בדק את הקשר בין צבע השיער לבין צבע העיניים בעזרת מבחן חי בריבוע בקרב 52 נבדקים. תוצאות המבחן מוצגות בטבלה. בנוסף ידוע כי סטטיסטי המבחן שהתקבל מעיבוד הנתונים הוא 8.08.
- מה תהיה מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 1%?
  - מה ערכו של E עבור עיניים כחולות וצבע שיער כהה.
  - מה יהיה בקירוב ערכו של מקדם המתאם של קרמר?
  - מהי פרופורציית בעלי צבע השיער הבהיר מקרב בעלי העיניים הירוקות?

להלן הפלט:

Crosstabulation צבע עיניים \* צבע שיער

		צבע שיער		Total	
		כהה	בהיר		
צבע עיניים	כחול	Count			
		% within	50.0%	50.0%	100.0%
		% within	21.6%	53.3%	30.8%
		% of Total	15.4%	15.4%	30.8%
	חום	Count			
		% within	83.3%	16.7%	100.0%
		% within	27.0%	13.3%	23.1%
		% of Total	19.2%	3.8%	23.1%
	ירוק	Count			
		% within	79.2%	20.8%	100.0%
		% within	51.4%	33.3%	46.2%
		% of Total	36.5%	9.6%	46.2%
Total		Count			
		% within	71.2%	28.8%	100.0%
		% within	100.0%	100.0%	100.0%
		% of Total	71.2%	28.8%	100.0%

- 5) במחקר מסוים רצו לבדוק האם יש קשר בין המגדר להוצאה על לבוש במשך שנה. דגמו באופן מקרי גברים ונשים ובדקו את רמת ההוצאה שלהם על לבוש בשנה האחרונה. חוקר א' בדק האם קיים הבדל בתוחלות ההוצאה בין גברים לנשים. חוקר ב' קיבץ את ההוצאה לקטגוריות ובאופן הזה בדק האם קיים הבדל בהתפלגות ההוצאה בין גברים לנשים. הקטגוריות חולקו לשלוש קבוצות הוצאה.
- איזה פלט מתאים לאיזה אחד מהחוקרים? נמקו.
  - מה מסקנתו של חוקר א'? בדקו ברמת מובהקות  $\alpha = 0.05$ . (רשמו השערות, נסחו הנחות, ציינו כלל החלטה ותנו מסקנה במונחי המשתנים).
  - איזו טעות יכולה להיות במסקנתו של חוקר א'? נסחו את הטעות במונחי השאלה.
  - מהי מסקנתו של חוקר ב'? בדקו ברמת מובהקות  $\alpha = 0.05$ . (רשמו השערות, נסחו הנחות, ציינו כלל החלטה ורשמו מסקנה במונחי המשתנים).
  - איזו טעות יכולה להיות במסקנתו של חוקר ב'? נסחו זאת במונחי השאלה. כיצד ניתן ליישב את מסקנות שני החוקרים?

להלן פלט ראשון:

## T-Test

## Group Statistics

gender	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
female	40	2.9000	1.15025	.18187
male	40	2.6000	2.52982	.40000
dimensio n1				

## Independent Samples Test

Independent Samples Test										
		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
expose	Equal variances assumed	16.805	.000	.683	78	.497	.30000	.43941	-.57479	1.17479
	Equal variances not assumed			.683	54.464	.498	.30000	.43941	-.58078	1.18078

להלן פלט שני:

**Crosstabs****Case Processing Summary**

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
gender * category	80	100.0%	0	.0%	80	100.0%

**gender \* category Crosstabulation**

			category			Total
			a	b	c	
gender	Female	Count	2	30	8	40
		Expected Count	11.0	21.0	8.0	40.0
		% within gender	5.0%	75.0%	20.0%	100.0%
		% within category	9.1%	71.4%	50.0%	50.0%
	Male	Count	20	12	8	40
		Expected Count	11.0	21.0	8.0	40.0
		% within gender	50.0%	30.0%	20.0%	100.0%
		% within category	90.9%	28.6%	50.0%	50.0%
Total		Count	22	42	16	80
		Expected Count	22.0	42.0	16.0	80.0
		% within gender	27.5%	52.5%	20.0%	100.0%
		% within category	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%

**Chi-Square Tests**

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	22.442 <sup>a</sup>	2	.000
Likelihood Ratio	25.064	2	.000
N of Valid Cases	80		

a. 0 cells (.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 8.00.

## תשובות סופיות

- (1) א. 1.973      ב. קטן .      ג. לא נדחה  $H_0$  .      ד. 34.5%      ה. 38.5% .
- (2) א. בילוי מועדף ומוזיקה מועדפת עם 3 קטגוריות לכל משתנה.      ב. לא      ג. 4 .      ד.  $H_0$  אין תלות בין בילוי מועדף למוזיקה מועדפת.       $H_1$  יש תלות בין בילוי מועדף למוזיקה מועדפת.
- (3) א. 6, 21.6%, 71.2%      ב. 15.8      ג. קטן מ-0.005 .
- (4) א. לא נדחה  $H_0$  .      ב. 11.4      ג. 0.394      ד. 20.8% .
- (5) א. פלא א' - חוקר א', פלא ב' - חוקר ב' .      ב. נקבל את  $H_0$  .      ג. טעות מסוג שני- הכרענו שאין הבדל בין גברים לנשים למרות שיש במציאות הבדל.      ד. נקבל את  $H_1$  .      ה. טעות מסוג ראשון- הכרענו שיש קשר בין מין להוצאה למרות שבמציאות אין קשר.      ו. כל חוקר פעל בשיטה סטטיסטית שונה ובמצב כזה יתכן מסקנות סותרות.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 25 - מקדם המתאם ( מדד קשר ) הלינארי ומובהקותו

תוכן העניינים

- 1. מקדם המתאם הלינארי ( פירסון ) ..... 161
- 2. חישוב מקדם המתאם הלינארי (פירסון) ..... 172
- 3. ניתוח פלטים על מקדם המתאם הלינארי ..... 177



## מקדם המתאם (מדד קשר) הלינארי ומובהקותו

### מדד הקשר הלינארי (פירסון) – מבוא

מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר מסוג קשר לינארי (קו ישר) בין שני משתנים. שני המשתנים שאנו בודקים לגביהם קשר צריכים להיות משתנים כמותיים. מבחינת סולמות מדידה כל משתנה נחקר צריך להיות מסולם רווחים או מנה. בדרך כלל המשתנה המוצג כ- $Y$  הוא המשתנה התלוי והמשתנה המוצג ב- $X$  הוא המשתנה הבלתי תלוי. תיאור גרפי לנתונים נעשה על ידי דיאגרמת פיזור. בדיאגרמת פיזור אנחנו מסמנים כל תצפית בנקודה לפי שיעור ה- $X$  ושיעור ה- $Y$  שלה. דיאגרמת הפיזור נותנת אינדיקציה גרפית על הקשר בין שני המשתנים.

### דוגמה (פתרון בהקלטה) :

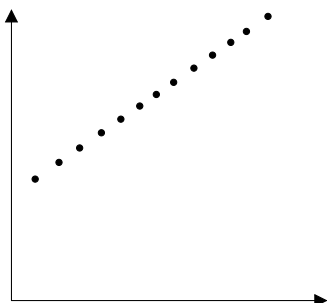
בבניין 8 דירות בדקו לכל דירה את מספר החדרים שלה וכמו כן את מספר הנפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו :

4	4	3	3	2	3	2	2	מספר חדרים בדירה
5	4	4	3	2	2	1	0	מספר הנפשות בדירה

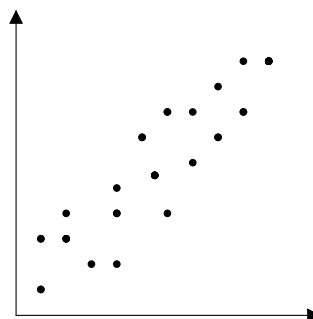
- (1) כמה תצפיות ישנן בדוגמה?
- (2) כמה משתנים ישנם בדוגמה, מי הם?
- (3) שרטטו לנתונים דיאגרמת פיזור.
- (4) מי המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי?

## דיאגרמות פיזור לקשר בין משתנים וניתוחם

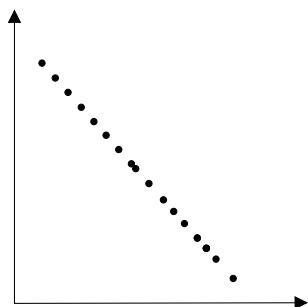
קשר לינארי חיובי מלא



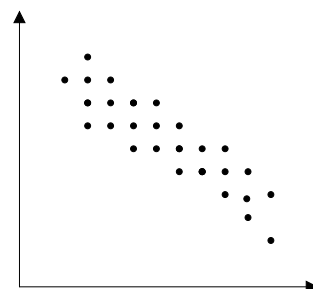
קשר לינארי חיובי חלקי



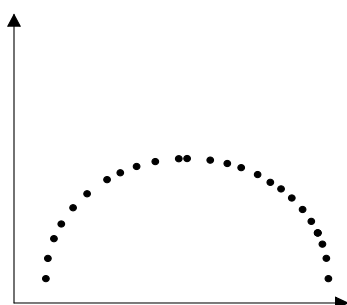
קשר לינארי שלילי מלא



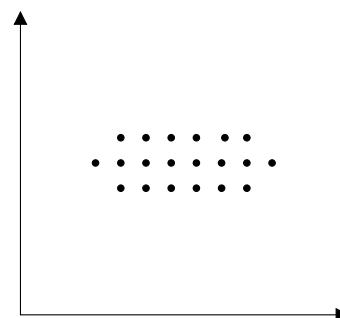
קשר לינארי שלילי חלקי



אין קשר לינארי



אין קשר



### משמעות מקדם המתאם:

כדי לבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים ישנו מדד קשר שנקרא גם מקדם המתאם הלינארי הידוע גם בשם מקדם המתאם של פירסון. מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין 1 ל-1.

-1

0

1

מקדם מתאם 1-או 1 אומר שקיים קשר לינארי מלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי נוסחה של קו ישר:  $y = ax + b$ .

### מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לינארי מלא בו השיפוע  $a$  יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי (מקדם מתאם -1) מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע  $a$  שלילי.

### מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את  $X$  ל- $Y$  באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את  $X$  ל- $Y$  באופן מוחלט. ככל שמקדם המתאם קרוב לאפס עוצמת הקשר יותר חלשה וככל שהמדד רחוק יותר מהאפס העוצמה יותר חזקה. לסיכום, מקדם המתאם בודק את עוצמת הקשר הלינארי, ואת כיוון הקשר.

מקדם המתאם הלינארי אינו מושפע מיחידות המדידה. כל שינוי ביחידות המדידה של המשתנים, לא ישנה את מקדם המתאם.

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב:  $\rho$  - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

$r$  - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר  $\rho$ .

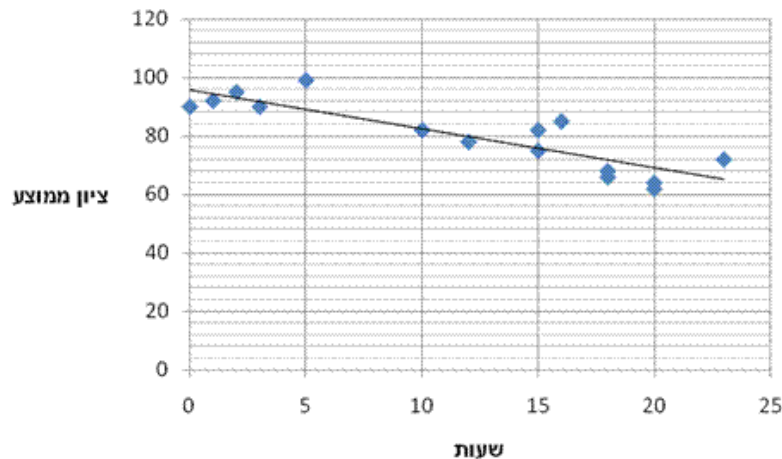
קיומו של מתאם בין שני משתנים אינו מצביע על סיבתיות בהכרח. למשל, אם נמצא מתאם חיובי בין כמות הסוכרזית שאדם אוכל לבין במשקל שלו אין זה אומר שהסיבה להשמנה היא הסוכרזית. מדד הקשר של פירסון הוא מדד קשר סימטרי, כלומר אם נחליף את  $X$  ב- $Y$  התוצאה תהיה זהה.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

- מה ניתן להגיד על מקדם המתאם של שני המשתנים על סמך דיאגרמת הפיזור ששרטטנו?
- אם היינו משנים את השרטוט כך שבציר האנכי היה המשתנה "מספר החדרים" ובציר האופקי היה "מספר הנפשות", האם הדבר היה משפיע על מדד הקשר של פירסון?

## שאלות

- (1) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור:



- א. מיהו המשתנה הבלתי תלוי?  
 ב. מה ניתן לומר על כיוון הקשר בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר? מה ניתן להגיד על עוצמת הקשר?
- (2) להלן טבלה המסכמת את מקדמי המתאם הלינארי בין ציוני מבחנים שונים שהתקבלו עבור תלמידים בכיתה מסוימת:

מתמטיקה	לשון	ספורט	
?	-0.7	?	ספורט
0.6	?	?	לשון
?	?	-0.1	מתמטיקה

- א. השלימו את מקדמי המתאם שמסומנים בסימן שאלה בטבלה.  
 ב. בין אילו שני ציוני מקצועות שונים קיים מתאם בעל העוצמה החזקה ביותר?

- (3) במחקר נתבקשו לבדוק את הקשר בין מספר שעות התרגול של קורס לבין הציון הסופי שלו. להלן תוצאות מדגם שהתקבל:

שעות תרגול	ציון סופי
20	90
25	90
30	95
15	60
30	90
20	85
10	50

- א. מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי בדוגמה זו?  
 ב. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים.  
 ג. מה ניתן לומר על הקשר בין המשתנים במדגם?  
 ד. מסתבר שבסופו של דבר נתנו פקטור של 5 נקודות לציון הסופי. כיצד הדבר היה משנה את מקדם המתאם של המדגם?

4) בתחנה המטאורולוגית רצו לבדוק את הקשר שבין הטמפרטורה במעלות צלזיוס לכמות המשקעים במ"מ. הם אספו נתונים על 10 ימים במהלך חודש ינואר. המתאם שהתקבל היה 0.8.

א. השלימו את המשפט:

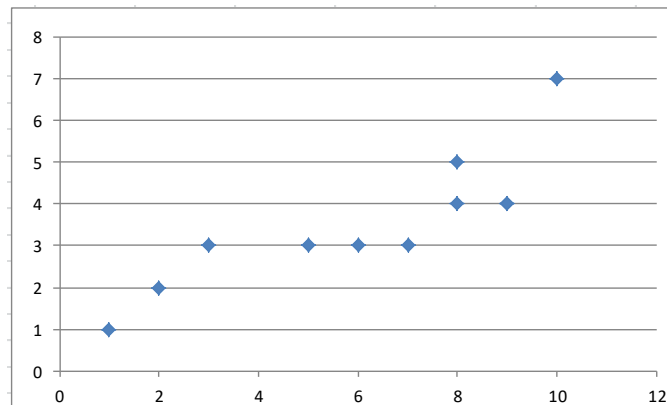
בחודש ינואר ככל שהטמפרטורה היומית נוטה לרדת, כך כמות המשקעים נוטה \_\_\_\_\_.

ב. הוחלט להעביר את הטמפרטורה למעלות פרנהייט על מנת שיוכלו

להשוות אותה לנתונים מארה"ב. נוסחת המעבר היא  $F^0 = 32 + \frac{9}{5} C^0$ .

כיצד הדבר ישפיע על מקדם המתאם בין הטמפרטורה במעלות פרנהייט לכמות המשקעים במ"מ?

5) להלן דיאגרמת פיזור המראה קשר בין שני משנים:



א. השלימו: ניתן לראות שהקשר הוא לינארי \_\_\_\_\_ (מלאו חלקי) כיוון הקשר הוא (חיובי/שלילי).

ב. השלימו: אם היינו מוסיפים תצפית שערך ה-  $X$  שלה הוא 4 וערך ה-  $Y$  שלה הוא 7, מקדם המתאם של פירסון היה \_\_\_\_\_ (גדלו קטן/לא משתנה).

**שאלות רב ברירה (יש לבחור את התשובה הנכונה):**

6) חוקר אקלים דגם כמה ימים בשנה ומדד את הטמפרטורה בטורונטו שבקנדה ואת הטמפרטורה בסידני שבאוסטרליה באותו היום. הוא חישב ומצא מקדם מתאם שלילי בין הטמפרטורה היומית בטורונטו לבין הטמפרטורה היומית בסידני. משמעות מקדם המתאם השלילי במדגם:

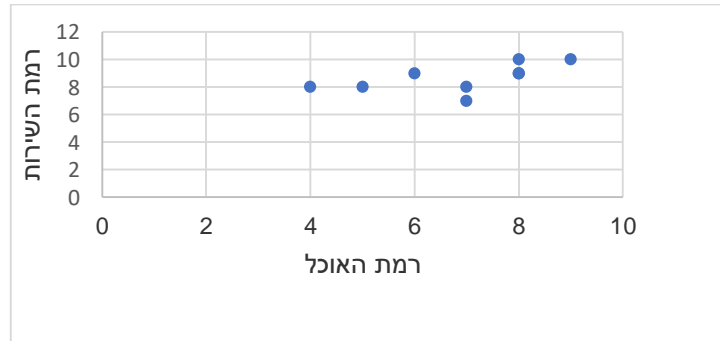
א. אין קשר בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה בסידני בימים שנדגמו.

ב. במדגם, רוב הטמפרטורות בטורונטו היו שליליות.

ג. ההפרש בין הטמפרטורה בטורונטו לבין הטמפרטורה באוסטרליה, במדגם זה, הוא שלילי.

ד. במדגם יש נטייה שהטמפרטורה יורדת בטורונטו לטמפרטורה לעלות בסידני.

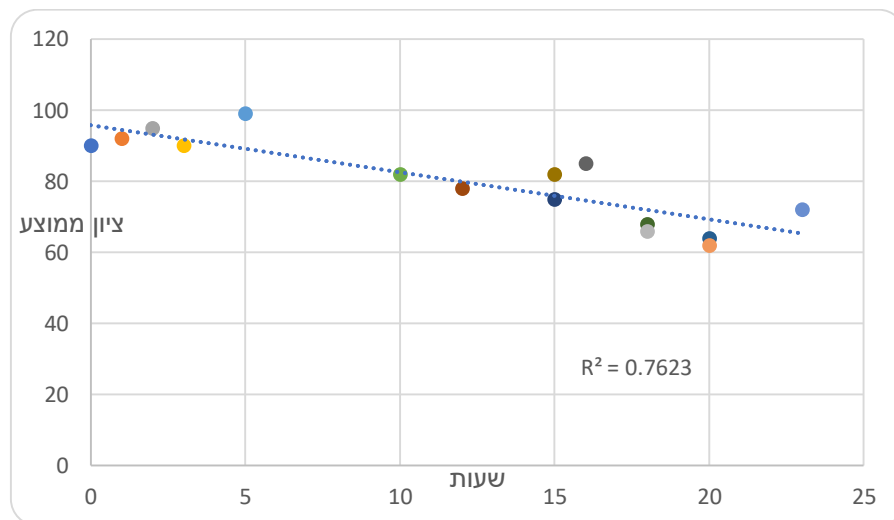
- 7) בסקר שביעות רצון שנערך בבית הקפה "פת לחם" התבקשו הלקוחות לדרג את מידת שביעות הרצון שלהם (בסולם 1-10) בשני נושאים: רמת האוכל ורמת השירות.



מה יהיה ערכו של מקדם המתאם ( $r$ )?

- א.  $r = -0.3$
- ב.  $r = 0$
- ג.  $r = 1.125$
- ד.  $r = 0.593$

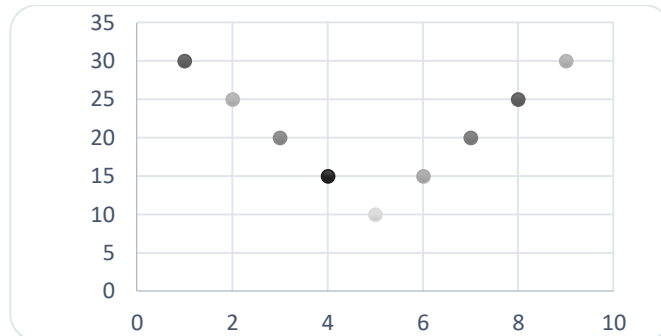
- 8) חוקר רצה לאפיין את הקשר בין מספר השעות בשבוע שסטודנט מקדיש לבילויים לבין הציון הממוצע שלו בסוף הסמסטר. לשם כך הוא אסף נתונים של 15 סטודנטים ויצר דיאגרמת פיזור.



מה ניתן לומר על כיוון הקשר במדגם בין מספר שעות הבילוי השבועיות לבין הציון הממוצע של הסמסטר?

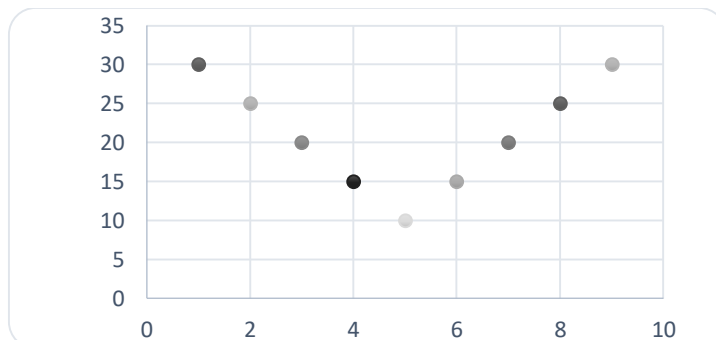
- א. ככל שמבליים יותר הציון נוטה לרדת.
- ב. אין קשר בין שעות הבילוי לציון.
- ג. ככל שמבליים פחות הציון נוטה לרדת.
- ד. ככל שהציון נוטה לרדת הסטודנט מבלה פחות.

9) התרשים הבא מתאר קשר בין שני משתנים, איזה מהמתאמים הבאים הוא המתאים ביותר לתיאור הקשר בין שני המשתנים?



- א.  $r = 1$  היות ושני המשתנים יוצרים קוים ישרים.
- ב.  $r = 2$  היות ויש שני קוים בעלי קשר מושלם.
- ג.  $r = 0$  היות והקו יורד ואחר כך עולה באותו האופן.
- ד.  $r = \pm 1$  היות ויש קו עולה וגם קו יורד.

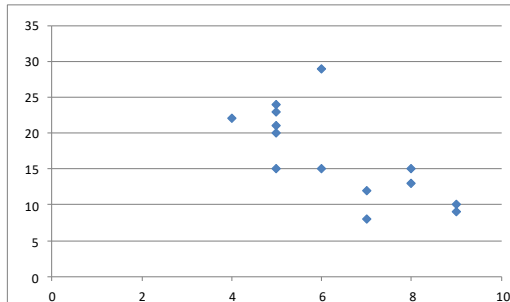
10) התרשים הבא מתאר דיאגרמת פיזור.



איזו טענה נכונה?

- א. בתרשים מוצג הקשר בין שני משתנים.
- ב. בתרשים מוצג הקשר בין 9 משתנים.
- ג. בתרשים מוצג הקשר בין 10 משתנים.
- ד. אין לדעת כמה משתנים מוצגים בתרשים.

בגרף הבא מתוארת דיאגרמת פיזור של שני משתנים :



$X$  - (משתנה בלתי תלוי בציר האופקי)

$Y$  - (משתנה תלוי).

במדגם התקבל  $r^2 = 0.52$ .

11) לאור הנתונים המופיעים בדיאגרמה, איזה מבין הערכים הבאים מתאים להיות התוצאה של  $r$  ?

א. -0.52

ב. 0.72

ג. -0.72

ד. 0.52

12) אם מקדם המתאם בין שני משתנים הוא 1, אזי :

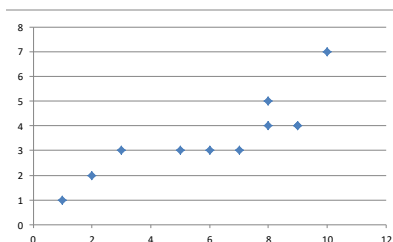
א. הערכים של המשתנים הם חיוביים.

ב. עבור כל תצפית ערך של משתנה אחד שווה לערך של המשתנה השני.

ג. הקשר הלינארי הוא בעוצמה חזקה.

ד. אף אחת מהתשובות לא בהכרח נכונה.

13) להלן דיאגרמת פיזור :



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים ?

א. 1

ב. 0.85

ג. 0.15

ד. 0

14) בבדיקת קשר בין שני משתנים התקבל :  $r = -1$ .

א. קיימת נוסחה לינארית הקושרת בין כל התצפיות.

ב. לא קיים קשר בין שני המשתנים.

ג. ככל שמשתנה אחד נוטה לרדת גם לשני יש נטייה לרדת.

ד. קיים קשר בין שני המשתנים, אך לא ניתן לדעת מאיזה סוג.



15) לפי הפתגם "רחוק מהעין, רחוק מהלב", יש קשר \_\_\_\_\_ בין קרבה פיזית לקרבה נפשית.

- א. חיובי
- ב. שלילי
- ג. אפסי
- ד. לא ניתן לדעת.

16) מבחן אמי"ר הינו מבחן מיון באנגלית של המרכז הארצי לבחינות והערכה. הציון המינימלי בבחינה הינו 150 והמקסימלי הינו 250. בקורס הכנה למבחן השתתפו 19 תלמידים. להלן הציונים שלהם על פי פלט שהתקבל:

	159
	170
	180
	185
	204
	224
	236
	212
	168
	189
	195
	163
	187
	206
	201
	223
	242
	203
	205
197.47	AVERAGE
536.25	VARPA

יש להוסיף עמודה נוספת לצד עמודת הציונים שתראה לכל תלמיד כמה נקודות חסרות לו כדי להשלים לציון המקסימלי בבחינה.

מה יהיה מקדם המתאם בין שתי העמודות (כלומר, מקדם המתאם בין הציון לבין הנקודות החסרות)?

- א. -1
- ב. 1
- ג. -0.5
- ד. 0.5

17) מקדם המתאם בין שטחי דירה למחיר שלהם חושב ונמצא 1.2. מה נובע מכך?

- א. ככל שהדירה גדולה יותר בשטחה כך היא יקרה יותר.
- ב. ככל שהדירה קטנה יותר בשטחה כך היא זולה יותר.
- ג. לא קיים קשר בין שטח הדירה למחיר הדירה.
- ד. מצב כזה שמתואר הנתונים לא אפשרי.

18) אם ניקח 10 אנשים ונרשום לכל אדם את הגובה במטר וכמו כן את הגובה בס"מ. מה יהיה מקדם המתאם בין גובה האדם במטר לגובה האדם בס"מ?

- א. 1
- ב. 0
- ג. -1
- ד. לא ניתן לדעת.

- 19** נמצא מתאם חיובי בעוצמה גבוהה בין  $X$  – ציון בבגרות בלשון ל  $Y$  – ציון בבגרות במתמטיקה. אילו מהמשפטים הבאים נכון?
- א. ניתן לומר שאחת מהסיבות להבדלים שיש לסטודנטים במתמטיקה נובעים מההבדלים שיש להם בלשון.
- ב. קיימת נוסחה של קו ישר שקושרת בין ציון בבגרות במתמטיקה לציון בבגרות בלשון.
- ג. ללא יוצא מן הכלל, ניתן להגיד שכל תלמיד שמצליח יותר מתלמיד אחר בלשון גם יצליח יותר מאותו תלמיד במתמטיקה.
- ד. אף אחד מהטענות שהוצגו אינה בהכרח נכונה.

- 20** עבור סדרה של תצפיות מדדו את  $X$  ואת  $Y$ . נמצא שעבור כל התצפיות שהערך של  $Y$  ירד הערך של  $X$  בהכרח ירד ללא יוצא מן הכלל. מקדם המתאם של פירסון יהיה בהכרח :

- א. 1
- ב. -1
- ג. 0
- ד. אף אחת מהתשובות.

## תשובות סופיות

- (1) א. שעות בילוי.  
ב. הקשר חלקי, כיוון הקשר שלילי.  
(2) א. להלן טבלה:  
ב. ספורט ולשון.

מתמטיקה	לשון	ספורט	
0.1	-0.7	1	ספורט
0.6	1	-0.7	לשון
1	0.6	-0.1	מתמטיקה

- (3) א. ב"ת- מס' שעות התרגול, תלוי- ציון.  
ג. קשר לינארי חיובי חלקי.  
(4) א. לעלות.  
(5) א. חלקי, חיובי.  
ב. קטן.  
ב. ראה גרף בפתרון וידאו.  
ד. מקדם המתאם לא היה משתנה.  
ב. לא ישפיע על מקדם המתאם.

(6) ד' (7) ד' (8) א' (9) ג' (10) א'

(11) ג' (12) ד' (13) ב' (14) א' (15) א'

(16) א' (17) ד' (18) א' (19) ד' (20) ד'

## מדדי קשר – מדד הקשר הלינארי (פירסון) – רקע

המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה. בדרך כלל,  $X$  הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו- $Y$  הוא המשתנה המוסבר (התלוי).

### דוגמה:

נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד  $X$  מסבירה את ההכנסה שלו  $Y$ . במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו.

**שלב ראשון:** נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים.

### דוגמה:

מס' דירה	$X$	$Y$
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים:  
 $X$  - מס' חדרים בדירה.  $Y$  - מס' נפשות הגרות בדירה.  
 להלן התוצאות שהתקבלו:

נשרטט מנתונים אלה דיאגרמת פיזור (הדיאגרמה המלאה בסרטון). נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור וננתח אותן (הדיאגרמות המלאות בסרטון).

**שלב שני:** מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבודק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.  
 המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי) ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).  
 מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין -1 ל-1.  
 מקדם מתאם -1 או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי הנוסחה:  $y = bx + a$ .

### מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1):

קיים קשר לינארי מלא בו השיפוע  $b$  יהיה חיובי ואילו מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע  $b$  שלילי (מקדם מתאם -1).

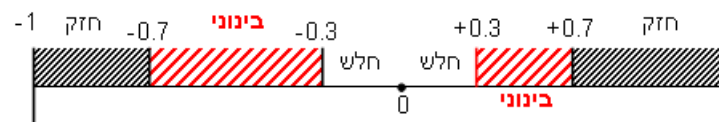
### מתאם חיובי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את  $X$  ל- $Y$  באופן מוחלט.

### מתאם שלילי חלקי:

ככל שמשתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את  $X$  ל- $Y$  באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר:



מקדם המתאם יסומן באות  $r$ .

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

$$COV(x, y) = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} : \text{שונות משותפת}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 : \text{שונות של המשתנה } X$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \bar{y}^2 : \text{שונות המשתנה } Y$$

$$r_{xy} = \frac{COV(x, y)}{S_x \cdot S_y} : \text{מקדם המתאם הלינארי}$$

## שאלות

- 1) להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	2	1	0	2	3	4
ציון	80	90	90	70	70	50

- א. שרטטו דיאגרמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר בין מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?
- ב. חשבו את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?
- ג. הסבירו, ללא חישוב, כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

X	Y
10	12
14	15
15	15
18	17
20	21

- 2) במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:
- א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?
- ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

- 3) נסמן ב-X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב-Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \qquad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76 \qquad \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 60.8$$

- א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל-Y. מיהו המשתנה התלוי?
- ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א'?

- (4) נסמן ב-  $X$  את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב-  $Y$  את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 2960$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשבו את מדד הקשר הלינארי בין  $X$  ל-  $Y$ .

- (5) במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב-3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2.  
מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

- (6) להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבעו נכון/לא נכון ונמקו.
- מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.
  - לסדרה של נתונים התקבל  $\bar{X} = \bar{Y} = 6$ ,  $S_x = S_y = 1$ . לכן, מדד הקשר של פירסון יהיה 1.
  - אם השונות המשותפת של  $X$  ושל  $Y$  הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

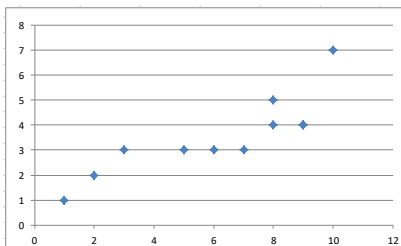
### שאלות רב-ברירה:

- (7) נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן:
- הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.
  - ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
  - ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
  - אף אחת מהתשובות לא נכונה.

8) נלקחו 20 מוצרים ונבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה-4.2ש). מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש"ח?

- א. 1  
 ב. 0  
 ג. 4.2  
 ד. לא ניתן לדעת.

9) להלן דיאגרמת פיזור: מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?



- א. 1  
 ב. 0.85  
 ג. 0.15  
 ד. 0

## תשובות סופיות

- 1) א. משתנה תלוי: ציון, משתנה ב"ת: מס' חיסורים. ראה דיאגרמה בוידאו. ניתן להסיק שקיים קשר לינארי שלילי וחלקי בין מספר החיסורים לציון התלמיד.  
 ב. -0.9325.  
 ג. הקשר יישאר לינארי שלילי חלקי אך עוצמתו תחלש.
- 2) א.  $\bar{y} = 16$ ,  $\bar{x} = 15.4$       ב.  $r_{xy} = 0.96$ .
- 3) א. 0.8  
 4) 0.8  
 5) 1  
 6) א. נכון.      ב. לא נכון.      ג. נכון.  
 7) ג'.  
 8) א'.  
 9) ב'.



## מדד הקשר הלינארי – ניתוח פלטים – רקע

מדד הקשר הלינארי באוכלוסייה, שנקרא גם מקדם המתאם של פירסון או מדד הקשר של פירסון באוכלוסייה מסומן ב:  $\rho$  - פרמטר המאפיין את עוצמת הקשר הלינארי באוכלוסייה וכיוונו בין שני המשתנים הנחקרים. כאשר:

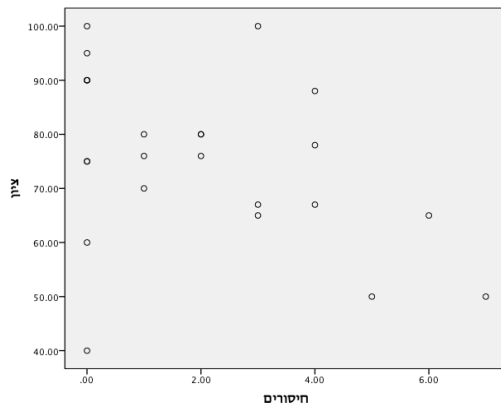
$r$  - מדד הקשר הלינארי במדגם שמהווה אומד לפרמטר  $\rho$ .

השערת האפס: תהיה שבאוכלוסייה לא קיים כלל קשר לינארי בין שני המשתנים:  $H_0: \rho = 0$ .

ההנחה שעליה אנו מתבססים בתהליך היא ששני המשתנים הנחקרים מתפלגים דו נורמלית.

### דוגמה (פתרון בהקלטה):

הדיקן ביקש לדגום סטודנטים כדי לבדוק את הקשר בין ציון הסטודנט בקורס למספר הפעמים שהוא החסיר שיעור בקורס. דיאגרמת הפיזור שהתקבלה במדגם שבוצע:



- מיהו המשתנה התלוי ומיהו המשתנה הבלתי תלוי במחקר?
- מה ניתן לראות לגבי הקשר הלינארי בין המשתנים שהתקבל בהתבססות במדגם?

Correlations

		חיסורים	ציון
חיסורים	Pearson Correlation	1	-.389
	Sig. (2-tailed)		.060
	N	24	24
ציון	Pearson Correlation	-.389	1
	Sig. (2-tailed)	.060	
	N	24	24

- מהו מקדם המתאם שהתקבל במדגם? מה המשמעות שלו?
- האם ניתן להגיד ברמת מובהקות של 5% שקיים מתאם לינארי שלילי בין מספר החיסורים של הסטודנטים מהקורס לבין הציון של הסטודנטים בקורס?

## שאלות

1) מחקר רפואי התעניין לבדוק האם קיים קשר לינארי בין גיל האישה בהריון לרמת ההמוגלובין שלה. להלן תוצאות מדגם שהתקבלו, עבור נשים בהריון :

Correlations

		age	hemoglobin
age	Pearson	1	.565
	Correlation		
	Sig. (2-tailed)	23	.005
	N		
hemoglobin	Pearson	.565	1
	Correlation		
	Sig. (2-tailed)	.005	23
	N		

- א. מהי אוכלוסיית המחקר?
- ב. מהן השערות המחקר?
- ג. מהו המשתנה הבלתי תלוי ומהו המשתנה התלוי במחקר?
- ד. מהי מסקנת המחקר ברמת מובהקות של 5%?

2) במדגם שנעשה נבדקו מספר משתנים על התצפיות שנדגמו. להלן פלט שהופק על המדגם:

Correlations

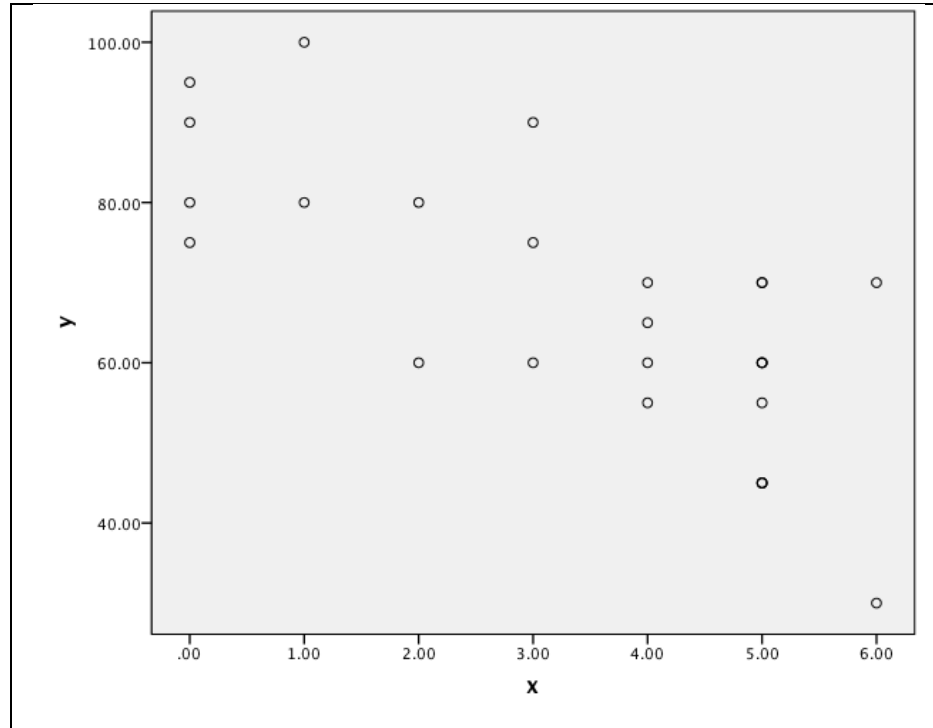
		x	y	z	w
x	Pearson	???	-.682	.134	.176
	Correlation				
	Sig. (2-tailed)		.005	.634	.530
	N	15	15	15	15
y	Pearson	-.682	1	???	-.555
	Correlation				
	Sig. (2-tailed)	.005		.544	.032
	N	15	15	15	15
z	Pearson	.134	.170	1	-.247
	Correlation				
	Sig. (2-tailed)	???	.544		.374
	N	15	15	15	15
w	Pearson	.176	-.555	-.247	1
	Correlation				
	Sig. (2-tailed)	.530	.032	.374	
	N	15	15	15	15

א. בין אילו שני משתנים שונים הקשר הלינארי במדגם נמצא עם העוצמה הכי חזקה?

ב. ברמת מובהקות של 5%, אילו שני משתנים בעל קשר לינארי מובהק?

ג. השלימו את המספרים המסומנים בפלט בסימני שאלה.

3) נדגמו מספר תלמידים בכיתה יב' ובדקו לכל תלמיד:  $X$  - מספר שעות שבועיות שהתלמיד צופה בטלוויזיה ביום  $Y$  - ציון הבגרות שלו במתמטיקה. להלן התוצאות שהתקבלו במחקר:



Correlations

		x	y
x	Pearson	1	-.741**
	Correlation		
	Sig. (2-tailed)		
	N		
y	Pearson	-.741**	1
	Correlation		
	Sig. (2-tailed)		
	N		

\*\* . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

- א. מהו המשתנה התלוי ומהו המשתנה הבלתי תלוי?
- ב. מהו כיוון הקשר שהתקבל במדגם ומהו עוצמתו?
- ג. האם ניתן להגיד שבאופן מובהק ככל שתלמיד צופה יותר בטלוויזיה הוא מצליח פחות בבגרות במתמטיקה?
- ד. בהמשך לסעיף הקודם, האם ניתן להגיד שהסיבה להצלחה או אי הצלחה בבגרות במתמטיקה היא זמן הצפייה בטלוויזיה?

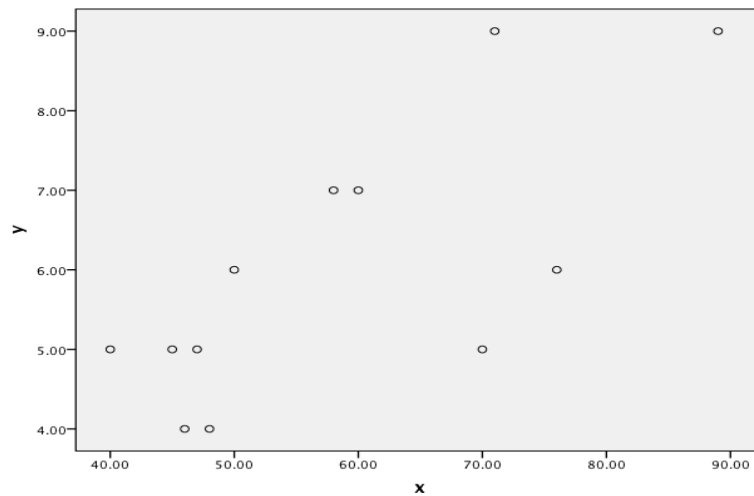
4) נדגמו ילדים בגיל 8 ונבדק עבור כל ילד גובהו בס"מ ומשקלו בק"ג. להלן הפלט שהתקבל עבור תוצאות המדגם:

### Correlations

	משקל	גובה
גובה Pearson	.552	1
Correlation		
Sig. (2-tailed)	.062	
N	12	12
משקל Pearson	1	.552
Correlation		
Sig. (2-tailed)	.062	
N	12	12

- בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים קשר לנארי חיובי בין המשקל והגובה.
- באילו רמות מובהקות ניתן לקבוע שקיים קשר לנארי חיובי בין במשקל והגובה?
- כיצד התשובה לסעיף הקודם הייתה משתנה אם היו מתווספות עוד 3 תצפיות למדגם?

5) בתהליך כימי מסוים חוקר בדק את הקשר בין הטמפרטורה בתהליך ( $X$ ) לבין אחוז החומר ( $Y$ ) בתהליך. דיאגרמת הפיזור שהתקבלה היא:



Correlations

		x	y
x	Pearson	1	.732**
	Correlation		
	Sig. (2-tailed)		
	N		
y	Pearson	.732**	1
	Correlation		
	Sig. (2-tailed)		
	N		

\*\* . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

- מה ניתן להגיד על סמך הפלט על הקשר שנימצא במדגם בין הטמפרטורה בתהליך לאחוז החומר?
- האם הקשר בין הטמפרטורה בתהליך לבין אחוז החומר הוא קווי חיובי מובהק? בדקו ברמת מובהקות של 5%.
- מה היה קורה למקדם המתאם במדגם ומובהקות התוצאה אם הייתה מתווספת תצפיות שבה הטמפרטורה היא 40 ואחוז החומר 9?

## תשובות סופיות

- (1) א. נשים בהריון. ב.  $H_0: p = 0$   
 $H_1: p \neq 0$
- ג. משתנה תלוי – רמת ההמוגלובין, משתנה בלתי תלוי – גיל.  
 ד. קיים קשר לינארי בין גיל האישה בהריון לרמת ההמוגלובין שלה בדם.
- (2) א. בין  $X$  ל- $Y$ . ב.  $X$  ו- $Y$ . כמו כן,  $W$  ו- $Y$ . ג. ראה וידאו.
- (3) א. משתנה תלוי – ציון בבגרות במתמטיקה, משתנה בלתי תלוי – שעות צפייה.  
 ב. כיוון שלילי ועוצמה של 0.741. ג. כן. ד. לא.
- (4) א. נדחה את  $H_0$ . ב. לפחות 0.032. ג. לא ניתן לדעת.
- (5) א. קיים קשר לינארי חיובי וחלקי שעוצמתו: 0.732. ב. נדחה את  $H_0$ .  
 ג. מקדם המתאם קטן ומובהקות התוצאה גדלה.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 26 - מדד הקשר ספירמן

תוכן העניינים

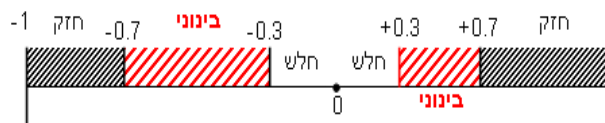
1. כללי ..... 184



## מדדי קשר – מדד הקשר של ספירמן:

### רקע:

מתי נשתמש במדד ספירמן?  
כאשר אחד המשתנים מסולם סדר והשני מסולם סדר ומעלה.  
הקשר שהמדד בודק הוא קשר דירוגי.  
מדד הקשר בודק את:



1. כיוון הקשר.

2. עצמת הקשר.

המדד מקבל ערכים בסקלה מ-(-1) ועד 1.

### קשר דירוגי חיובי מלא:

מדד הקשר של ספירמן יוצא 1.  
ככל שמשנתנה אחד עולה, השני עולה ללא יוצא מן הכלל.

### קשר דירוגי חיובי חלקי:

מקדם המתאם בין 0 ל-1.  
ככל שמשנתנה אחד עולה, לשני יש נטייה לעלות אך לא באופן מוחלט.

### קשר דירוגי שלילי מלא:

מדד הקשר של ספירמן יוצא -1.  
ככל שמשנתנה אחד עולה השני יורד ללא יוצא מן הכלל.

### קשר דירוגי שלילי חלקי:

מקדם המתאם הוא בין 0 ל-(-1).  
ככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אך לא באופן מוחלט.  
על מנת לחשב את הקשר יש לבצע פעולת דירוג (RANK).  
כאשר מדרגים, אם יש כמה תצפיות שתופסות את אותו הערך אז הדירוג שלהם הוא הממוצע של המקומות שהן תופסות.

$$\text{הנוסחה של מדד הקשר: } r_s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

בתחרות רוקדים עם כוכבים השתתפו 7 זוגות, 2 שופטים נתנו את ציוניהם לריקוד של כל זוג. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר הזוג	ציון שופט א'	$R_x$	ציון שופט ב'	$R_y$	$d = r_x - r_y$	$d^2$
1	4		5			
2	5		5			
3	6		7			
4	5		7			
5	8		9			
6	7		9			
7	3		7			

מהי מידת ההתאמה בין ציוני השופטים?

$X$  - ציון שופט א' (סולם סדר).

$Y$  - ציון שופט ב' (סולם סדר).

## שאלות:

- (1) בתחרות יופי חילקו שני שופטים ציונים למועמדות:

מספר מועמדת	1	2	3	4	5	6	7
ציון שופט א'	7	8	6	8	9	5	6
ציון שופט ב'	8	8	7	8	9	5	7

האם קיים קשר בין שתי הערכות השופטים? נמקו והסבירו!

- (2) משרד רצה לבחון האם קיים קשר בין מידת המוטיבציה של העובדים שלו לבין מספר החיסורים של העובדים בחודש עבודה. להלן התוצאות שהתקבלו:

מספר חיסורים	מידת מוטיבציה
0	גבוהה
4	נמוכה
2	בינונית
5	נמוכה
1	גבוהה

האם קיים קשר בין רמת המוטיבציה של העובד ומספר החיסורים שלו? חשבו באמצעות מדד הקשר המתאים והסבירו.

- (3) אם:  $r_s = 1$ , הדבר אומר שערכי  $X$  תמיד שווים לערכי  $Y$ . האם הטענה נכונה? הסבר.

## תשובות סופיות:

- (1) קיים קשר דירוג חיובי חזק בין הערכת שופט א' להערכת שופט ב'.  
מדד הקשר: 0.973.
- (2) קיים קשר שלילי בעוצמה חזקה בין רמת המוטיבציה של העובד למס' החיסורים שלו.  
מדד הקשר: -0.85.
- (3) לא נכון.

# מבחן פטור לתואר שני בניתוח נתונים וסטטיסטיקה

פרק 27 - מדדי קשר - בחירת מדד מתאים

תוכן העניינים

1. בחירת מדד מתאים.....187

## מדדי קשר – בחירת מדד מתאים:

### רקע:

בפרק זה נתרגל את התהליך של בחירת מדד הקשר (מקדם המתאם) המתאים. נתרכז בשלושת מדדי הקשר הנפוצים ביותר:

- מדד הקשר של קרמר.
- מדד הקשר של ספירמן.
- מדד הקשר של פירסון (מדד הקשר הלינארי).

בחירת מדד הקשר נעשה לפי סולמות המדידה של שני המשתנים שאנחנו רוצים לבדוק את הקשר בינם. הנושא של סולמות מדידה נלמד כבר בפרק אחר, כמו כן כל מדד קשר נלמד בפרק נפרד. אנו מתרכזים ב 3 סולמות מדידה:

- סולם שמי/ זהות (nominal).
- סולם סדר (ordinal).
- סולם כמותי (scale): לכאן אנו מאחדים את סולם רווחים ומנה יחד.

שלושת מדדי הקשר שלעיל דנים בקשר בין שני משתנים. מדדי הקשר הם סימטריים, כלומר אין זה משנה איזה משתנה נגדיר בתור משתנה  $X$  ואיזה יוגדר בתור משתנה  $Y$ .

להלן טבלה שמסכמת את בחירת המדד המתאים:

$X / Y$	שמי	סדר	כמותי
שמי	קרמר	קרמר	קרמר
סדר	קרמר	ספירמן	ספירמן
כמותי	קרמר	ספירמן	פירסון

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום. איזה מדד קשר מתאים כדי לבדוק האם קיים קשר בין התפוקה היומית לכמות עובדים באותו היום במפעל?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

## שאלות:

- (1) בקרב תלמידי כיתות א' בבית הספר גבריאלי אשר בתל אביב בדקו לכל תלמיד את גובהו בס"מ ואת משקלו בק"ג. מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק האם קיים קשר בין גובה התלמיד למשקלו?
- פירסון.
  - ספירמן.
  - קרמר.
  - אין מספיק נתונים כדי לדעת.
- (2) בסקר שנעשה על אזרחים במדינה בדקו לכל אזרח את השכלתו ואת שכרו. מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק האם קיים קשר בין השכלה לשכר?
- פירסון.
  - ספירמן.
  - קרמר.
  - אין מספיק נתונים כדי לדעת.
- (3) בגן הילדים של שולה אספו נתונים על 25 הילדים שבגן. על כל ילד בדקו את רמת הביטחון העצמי שלו ( $X$  = מדד שמקבל ערכים בין 1 - נמוך ועד 5 - גבוה), ואת אוצר המילים שלו ( $Y$  = לפי מבחן שנעשה לכל ילד בו ספרו את מספר המילים שידע מתוך רשימה של 20 מילים). איסוף הנתונים נעשה על ידי איש מקצוע שצפה בילדים ובחן אותן.
- מהו מקדם המתאם המתאים לבדיקת התלות בין  $X$  לבין  $Y$ ?
- פירסון.
  - ספירמן.
  - קרמר.
  - אין מספיק נתונים כדי לדעת.
- (4) הועלתה השערה בבית הספר למדעי ההתנהגות שיש קשר בין המרצה להצלחת הסטודנט. לצורך בדיקת הטענה בדקו לגבי כל סטודנט שלמד סטטיסטיקה אצל איזה מרצה הוא למד (היו 3 מרצים שונים) והאם הוא עבר את הבחינה. מהו מדד הקשר המתאים במקרה זה?
- פירסון.
  - ספירמן.
  - קרמר.
  - אין מספיק נתונים כדי לדעת.

(5) בבורסה בתל אביב רצו לבדוק את הקשר בין גובה הריבית במשק בסוף החודש (באחוזים), לבין תשואת מניית אקטר (באחוזים) בסוף החודש. מהו מדד הקשר המתאים?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

(6) בעל מסעדה ביצע סקר על לקוחותיו, בין השאלות שנשאלו בסקר :  
 • מה מידת שביעות הרצון של הלקוח מאדיבות השירות של המלצר בסקלה של 1 עד 5.  
 • מה גילו של הלקוח בשנים.  
 • מה גובה התשר (טיפ) ב-₪ אשר נתן הלקוח למלצר בלכתו מהמסעדה.

מהו המדד המתאים כדי לבדוק האם קיים מתאם חיובי בין מידת שביעות הרצון של הלקוח מאדיבות השירות לבין גובה התשר שהוא נתן למלצר?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

(7) בעל מסעדה ביצע סקר על לקוחותיו, בין השאלות שנשאלו בסקר :  
 • מה מידת שביעות הרצון של הלקוח מאדיבות השירות של המלצר בסקלה של 1 עד 5.  
 • מה גילו של הלקוח בשנים.  
 • מה גובה התשר (טיפ) ב-₪ אשר נתן הלקוח למלצר בלכתו מהמסעדה.

מהו המדד המתאים כדי לבדוק האם קיים מתאם בין גיל הלקוח לגובה התשר שהעניק לשירות?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.



### הנתונים הבאים מתאימים ל-3 השאלות הבאות:

חוקרים ערכו מדגם של ילדים מכיתות ב' ו-ג' מ-4 בתי ספר שונים. הועבר לילדים שאלון בו תואר מצב מסוים והילדים התבקשו לציין את רמת החרדה שלהם באשר לאותו מצב. המשתנים שלגביהם נאספו נתונים:

- מגדר (1 - בן, 2 - בת).
- כיתה (0 - ג', 1 - ב').
- בית ספר (A, B, C, D).
- רמת חרדה (ציון שהילד היה צריך לתת בסקלה של 1 עד 10).
- גיל התלמיד בחודשים.

8) מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק את הקשר בין גיל התלמיד לבין רמת החרדה שלו מהמצב?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

9) מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק את הקשר בין המגדר לבין רמת החרדה שלו מהמצב?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

10) מהו מדד הקשר המתאים כדי לבדוק את הקשר בין המגדר לבין בית הספר?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

**11** בטבלה שלהלן נתונות שכיחויות ההצלחה והכישלון של 150 חולים :

תוצאה/ התרופה	A	B	C
נרפא	35	13	45
לא נרפא	15	37	5

החולים קיבלו 3 תרופות שונות ובדקו עבור כל חולה אם התרופה הצליחה בריפוי. מהו מדד הקשר המתאים?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

**12** שני מוסיקאים מפורסמים נתנו ציון בסולם של 1-10 לקולם של 8 מתמודדים בתוכנית ריאליטי ידועה. ציון 10 ניתן לקול שמצא חן ביותר בעיני המוסיקאי. מפיק התוכנית רצה לבדוק האם יש קורלציה בין המוסיקאים מבחינת הטעם. בטבלה הבאה נתונים הציונים של כל אחד מהמוסיקאים את שמונת המתמודדים :

	1	2	3	4	5	6	7	8
מוסיקאי א'	6	5	7	4	3	1	1	4
מוסיקאי ב'	5	7	5	2	3	3	2	7

מהו מדד הקשר המתאים?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

**13** להלן טבלה המסכמת את השכר באלפי ₪ של עובדים בחברה ואת רמת המוטיבציה שלהם מ-1 עד 5 :

שכר	12	18	20	15	30
מוטיבציה	4	4	5	3	5

מהו מקדם המתאם המתאים לבדיקת רמת ההתאמה בין המוטיבציה לשכר של העובד?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

14) להלן טבלה על נתונים שנאספו על מספר תצפיות:

5	4	3	2	1	X
20	17	17	14	12	Y

אם מעוניינים לבדוק עד כמה קיים קשר לנארי בין שני המשתנים.  
מהו המדד המתאים?

- א. פירסון.
- ב. ספירמן.
- ג. קרמר.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת.

### תשובות סופיות:

א' (5	ג' (4	ב' (3	ד' (2	א' (1
ג' (10	ג' (9	ב' (8	א' (7	ב' (6
	א' (14	ב' (13	ב' (12	ג' (11